Scritto di Analisi Matematica B – 01.02.2022

Tempo a disposizione: 90 minuti

PARTE 1: ESERCIZI

Esercizio 1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri il campo scalare

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy^2) - \arctan(\sqrt{|y|})}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

1. Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ f è continuo in $(0,0)$?
2. Calcolare $\nabla f(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Per $v \neq \overrightarrow{e}_1$ e $v \neq \overrightarrow{e}_2$, calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Discutere la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

[**Punteggio: 6 punti**]

Esercizio 2. Calcolare i punti di minimo e massimo assoluto della funzione

$$g(x,y) = \arctan((y-x)^3)$$

nella regione

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 2y^2 \leq 2\}.$$

[**Punteggio: 5 punti**]

Esercizio 3. Si consideri il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(-2x\sin(x^2)\exp(\cos(x^2))y + 4x^3\log(y^2+1)\right)\vec{i} + \left(\exp(\cos(x^2)) + \frac{2x^4 y}{y^2+1}\right)\vec{j}.$$

Determinare $\mathrm{dom}(\overrightarrow{F})$. Delle seguenti affermazioni:

1. Date le curve
   (a) γ_1, parametrizzata dalla funzione $\vec{r}_1 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{r}_1(t) = (\cos(\pi - t), \sin(\pi - t))$
   (b) γ_2, parametrizzata dalla funzione $\vec{r}_2 : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{r}_2(t) = (t, |t| - 1)$

   si ha
   $$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{\gamma_2} \vec{F}$$
2. $\overrightarrow{F}$ è conservativo e il campo scalare
   $$\varphi(x,y) = \exp(\cos(x^2))y + x^4\log(y^2+1) + 5$$
   definito sul suo dominio naturale, è un potenziale per $\overrightarrow{F}$;
3. $\iint_{B_1(0)} \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$ (con $B_1(0)$ la palla aperta di centro $(0,0)$ e raggio unitario);

4. La circuitazione di $\overrightarrow{F}$ lungo l'ellisse di centro $(1,0)$ e semiassi $a = \frac{1}{2}$ e $b = 4$, percorsa in senso orario, è uguale a 4π
5. L'integrale curvilineo $\int_\gamma \overrightarrow{F}$, ove γ è il segmento congiungente il punto $(\frac{1}{2}, 0)$ al punto $(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, 1)$, vale

$$\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi^2}{16}\log(2)$$

tutte e sole quelle corrette sono... **Giustificare accuratamente ogni risposta**.

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 4. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \left(\sqrt{f(x,y)} - f(x,y)\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

con $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$ sul dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 4, \ y \geq 0\}.$$

[Punteggio: 5 punti]

PARTE 2: QUESITI DI TEORIA

Esercizio 5.

(a) Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una data funzione. Sia $\vec{x}_0 \in \Omega$. Definire la proprietà *f è differenziabile in $\vec{x}_0$*. Enunciare il teorema sui rapporti fra differenziabilità e esistenza delle derivate parziali e direzionali.

(b) Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo scalare, e $\vec{x}_0 \in \Omega$. Dare la definizione del fatto che $\vec{x}_0$ è punto di massimo/minimo relativo ed enunciare il teorema di Fermat.

(c) Enunciare il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale per l'integrale di Riemann.

(d) Dimostrare, a scelta, uno dei suddetti teoremi.

[Punteggio: 9 punti]

REGOLE: la prova è superata se sono verificate ***entrambe*** le condizioni:

1. Nella parte 1 si consegue un punteggio maggiore o uguale a 11;
2. Il punteggio totale (parte 1+parte 2) è maggiore o uguale a 18.