

# Scritto di Analisi Matematica B – 04.04.2023

Tempo a disposizione: 90 minuti

---

## PARTE 1: ESERCIZI

---

**Esercizio 1.** Sia  $\alpha \geq 0$  e si consideri il campo scalare

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\arctan(|x|^3)(\sin y - y \cos y)}{(\sqrt{x^2 + y^2})^\alpha} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Studiare, al variare di  $\alpha \geq 0$ ,

1. la continuità di  $f$  in  $(0, 0)$ ;
2. l'esistenza di  $\nabla f(0, 0)$ ;
3. l'esistenza delle derivate direzionali di  $f$  in  $(0, 0)$ ;
4. la differenziabilità di  $f$  in  $(0, 0)$ .

[Punteggio: 5 punti]

**Esercizio 2.** Determinare e classificare i punti stazionari della funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  data da

$$f(x, y) = \exp\left(y^2 \left(\frac{y}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\right).$$

[Punteggio: 6 punti]

**Esercizio 3.** Calcolare l'integrale curvilineo del campo scalare  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

lungo la curva con parametrizzazione  $\vec{r} : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{r}(t) = (t, \log(t))$ .

[Punteggio: 5 punti]

**Esercizio 4.** Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T e^{x^2+y^2} (4x^2 + 2x) \, dx \, dy,$$

dove

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}.$$

[Punteggio: 6 punti]

---

## PARTE 2: QUESITI DI TEORIA

---

### Esercizio 5.

- (a) Siano  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un insieme aperto,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  un campo scalare, e  $\vec{x}_0 \in \Omega$ . Dare la definizione del fatto che  $\vec{x}_0$  è punto di massimo/minimo relativo ed enunciare criterio del determinante Hessiano.
- (b) Enunciare il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale per l'integrale di Riemann.
- (c) Dare la definizione di campo conservativo e la definizione di campo irrotazionale. Enunciare il teorema sul rapporto fra conservatività e irrotazionalità.
- (d) Dimostrare, a scelta, uno dei teoremi ai punti (a), (b), (c).

[Punteggio: 9 punti]

---

**REGOLE:** la prova è superata se sono verificate *entrambe* le condizioni:

1. Nella parte 1 si consegue un punteggio maggiore o uguale a 11;
2. Il punteggio totale (parte 1+parte 2) è maggiore o uguale a 18.