

Scritto di Analisi Matematica B – 05.07.2021

Tempo a disposizione: 90 minuti

PARTE 1: ESERCIZI

Esercizio 1. Calcolare l'integrale

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} \log(x+2) dx.$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri il campo scalare

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \log(1+y^2) + y(1-e^{xy})}{(x^2+y^2)^{(2\alpha-1)}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

1. Per quali valori di α f è continuo in $(0, 0)$?
2. Calcolare $\nabla f(0, 0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Per $\vec{v} \neq \vec{e}_1$ e $\vec{v} \neq \vec{e}_2$, calcolare $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Discutere la differenziabilità di f in $(0, 0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 3. Determinare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = 4y^2 - y^4 - x^2y^2.$$

[Suggerimento: per infiniti punti critici di f sarà necessario effettuare la classificazione tramite uno studio del comportamento della funzione nell'intorno dei punti considerati...]

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 4. Si consideri il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{e^x + 2\beta x^3 y^2}{e^x + x^4 y^2} + \frac{6x}{1 + 9x^4} \right) \vec{i} + \left(\frac{\beta x^4 y}{e^x + x^4 y^2} - 3y^2 \sin(y^3 - 1) \right) \vec{j},$$

con $\beta \in \mathbb{R}$. Determinare $\text{dom}(\vec{F})$. Delle seguenti affermazioni:

1. Per $\beta = 2$, l'integrale curvilineo $\int_\gamma \vec{F}$, ove γ è il segmento congiungente il punto $(0, 1)$ al punto $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$, vale

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} + \cos(1) - 1$$

2. per $\beta = 1$, \vec{F} è conservativo

3. per $\beta = 2$, la circuitazione di \vec{F} lungo il bordo del quadrato di vertici $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ e $(1, 1)$ è nulla;
4. per $\beta = 2$, il campo scalare

$$\varphi(x, y) = \log(e^x + x^4 y^2) + \arctan(3x^2) + \cos(y^3 - 1) - 57$$

definito sul suo dominio naturale, è un potenziale per \vec{F} ;

5. \vec{F} è irrotazionale se e solo se $\beta = 1$

tutte e sole quelle corrette sono... **Giustificare accuratamente ogni risposta.**

[Punteggio: 6 punti]

PARTE 2: QUESITI DI TEORIA

Esercizio 5.

- (a) Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un campo scalare, e $x_0 \in \Omega$. Dare la definizione del fatto che f è continuo in x_0 .
- (b) Enunciare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale per l'integrale di Riemann.
- (c) Enunciare il teorema di Fermat.
- (d) Dimostrare, a scelta, uno dei suddetti teoremi.
- (e) Si consideri il campo di Aharonov-Bohm

$$\vec{G}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}.$$

Sia D il dominio naturale di \vec{G} . Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando adeguatamente le risposte:

1. D è semplicemente connesso;
2. la circuitazione di \vec{G} lungo ogni curva chiusa e regolare a tratti con sostegno contenuto in D è nulla;
3. la circuitazione di \vec{G} lungo ogni curva chiusa e regolare a tratti con sostegno contenuto in $(-\infty, 0) \times (0, +\infty)$ è nulla.

[Punteggio: 9 punti]

REGOLE: la prova è superata se sono verificate *entrambe* le condizioni:

1. Nella parte 1 si consegue un punteggio maggiore o uguale a 11;
2. Il punteggio totale (parte 1+parte 2) è maggiore o uguale a 18.