Cognome e nome .... Firma .... Matricola ....

Istruzioni

1. COMPILARE la parte sovrastante la prima riga continua. In particolare, scrivere cognome e nome *in stampatello* e la firma sopra la riga punteggiata.
2. PUNTEGGI. risposta esatta = +4; risposta sbagliata = −0.5; risposta non data = 0;
3. La soglia di ammissione all'orale è 16 punti.
4. PROIBITO usare libri, quaderni, calcolatori, telefoni cellulari.
5. TEMPO a disposizione: 150 min.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E
F	F	F	F	F	F	F	F

1. L'integrale
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{4+\sin^2 x}\,dx$$
vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ $\boxed{\text{B}}$: 0 $\boxed{\text{C}}$: $3\frac{\ln(5)}{\ln(4)}$ $\boxed{\text{D}}$: $\ln\left(\frac{5}{4}\right)$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right)$ $\boxed{\text{F}}$: $\ln\left(\frac{6}{5}\right)$

2. Sia $\tilde{y}$ la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' + (\tan x)y = \cos x \\ y(0) = 4 \end{cases}$$
Allora $\tilde{y}(\pi/3)$ vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $2+\frac{\pi}{3}$ $\boxed{\text{B}}$: $4+\frac{\pi}{3}$ $\boxed{\text{C}}$: 2 $\boxed{\text{D}}$: $2+e$ $\boxed{\text{E}}$: 2π $\boxed{\text{F}}$: $2+\frac{\pi}{6}$

3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{y^2} - 1 + 2\sin(x^2 y)}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\alpha}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Delle seguenti affermazioni

(a) f continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 2$ (b) f è continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha \leq 2$ (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ (d) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ esiste se e solo se $\alpha \leq 1$ (e) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 2$ (f) f è differenziabile in $(0,0)$ se e solo se $\alpha < 1$

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (a), (c), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (d), (f) $\boxed{\text{C}}$: (a), (e) $\boxed{\text{D}}$: (b), (c), (d) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d), (f) $\boxed{\text{F}}$: (b), (f)

---

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = (y - x + 2)^3((x+1)^2 + y^2 - 1)^2 \,.$$

Dopo aver verificato che i punti dell'insieme

$$S = R \cup C \text{ con } R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y = x - 2\} \text{ e } C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; (x+1)^2 + y^2 = 1\}$$

sono stazionari, classificarli. Delle seguenti affermazioni

(a) tutti i punti di R sono di sella (b) tutti i punti di R sono di minimo assoluto (c) tutti i punti di C sono di sella (d) tutti i punti di C sono di minimo relativo (e) su C vi sono infiniti punto di minimo relativo e infiniti punti di sella (f) su R vi sono infiniti punti di massimo relativo e infiniti punti di sella

tutte e sole quelle corrette sono

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: (e), (f) $\boxed{\text{B}}$: (b), (c) $\boxed{\text{C}}$: (b), (d) $\boxed{\text{D}}$: (a), (e) $\boxed{\text{E}}$: (a), (d) $\boxed{\text{F}}$: (d), (f)

---

5. Si consideri la funzione $g(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1}$

nel dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 2 \leq x^2 + y^2 \leq 3\,,\; 0 \leq y \leq x\}$. Detti $M = \max_D g$ e $m = \min_D g$, si ha

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $m = 0$ e $M = \frac{2}{3}$ $\boxed{\text{B}}$: $m = \frac{2}{3}$ e $M = \frac{3}{4}$ $\boxed{\text{C}}$: $m = 0$ e $M = \frac{3}{4}$ $\boxed{\text{D}}$: $m = -\frac{3}{4}$ e $M = 0$ $\boxed{\text{E}}$: $m = -\frac{2}{3}$ e $M = 0$ $\boxed{\text{F}}$: $m = 0$ e $M = \frac{3}{8}$

Suggerimento: *può essere utile studiare il segno di g...*

---

6. L'integrale

$$\int_\Gamma \frac{2(x+y)}{x^2} ds,$$

ove Γ è il grafico della funzione $f(x) = x(\log(x) - 1)$ per $x \in [1, e^7]$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: 0 $\boxed{\text{B}}$: $\frac{2}{3}\left(50^{3/2} - 1\right)$ $\boxed{\text{C}}$: $50^{3/2} - 1$ $\boxed{\text{D}}$: $\frac{2}{3}50^{3/2}$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{1}{3}50^{3/2}$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{4}{3}\left(50^{3/2} - 1\right)$

---

7. Dato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y) = [2e^y\cos(x) + 2\sin(y)e^y]\,\vec{i} + [2xe^y(\sin(y) + \cos(y)) + e^y 2\sin(x)]\,\vec{j},$$

l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$, dove Γ è il segmento che congiunge i punti $A = (0,0)$ e $B = (\pi/2, \pi/2)$, orientato da A a B, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $(\pi+2)e^{\pi}$ $\boxed{\text{B}}$: $(2\pi+2)e^{\pi/2}$ $\boxed{\text{C}}$: $(2\pi+1)e^{\pi}$ $\boxed{\text{D}}$: $(\pi+2)e^{\pi/2}$ $\boxed{\text{E}}$: 0 $\boxed{\text{F}}$: $\pi e^{\pi/2}$

Suggerimento: *può essere utile ricorrere alla teoria dei campi conservativi...*

---

8. L'integrale
$$\iint_T \sqrt{x^2+y^2}(7-x^2-y^2)\, dxdy$$
dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 7\}$, vale

Risp.: $\boxed{\text{A}}$: $\frac{2}{15}7^{3/2}\pi$ $\boxed{\text{B}}$: $\frac{4}{15}7^{5/2}\pi$ $\boxed{\text{C}}$: $\frac{4}{5}7^{5/2}\pi$ $\boxed{\text{D}}$: $7^{3/2}\pi$ $\boxed{\text{E}}$: $\frac{1}{15}7^{5/2}\pi$ $\boxed{\text{F}}$: $\frac{1}{15}7^{3/2}\pi$
