Esercizi sui campi conservativi

1. Dire se $\overrightarrow{F} : \mathrm{dom}(\overrightarrow{F}) \to \mathbb{R}^2$

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\sqrt{1+x^2+y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)\overrightarrow{i}_1 + \frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\overrightarrow{i}_2$$

   è conservativo nel suo dominio.
   In caso affermativo, calcolarne un potenziale.

2. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = 6xy\exp(3x^2y)\overrightarrow{i}_1 + \alpha^2x^2\exp(3x^2y)\overrightarrow{i}_2$$

   è conservativo nel dominio

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 1 < x^2+y^2 < \sqrt{6}\right\}$$

3. Si consideri $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x+yz)\overrightarrow{i}_1 + (y+xz)\overrightarrow{i}_2 + (z+xy)\overrightarrow{i}_3$$

   Calcolare, se esiste, il potenziale di $\overrightarrow{F}$ in $\mathbb{R}^3$.

4. Sia Γ l'arco di ellisse

$$\overrightarrow{r}(t) = 2\cos(t)\overrightarrow{i}_1 + 3\sin(t)\overrightarrow{i}_2 \quad t \in [0,\pi]$$

   e $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (3x^2+y^2)\overrightarrow{i}_1 + 2xy\overrightarrow{i}_2$$

   (a) Calcolare il lavoro di $\overrightarrow{F}$ lungo Γ
   (b) $\overrightarrow{F}$ è conservativo nel suo dominio? Se sì, calcolarne un potenziale.

5. Sia Γ l'arco di circonferenza di centro $C = (2,1)$ ed estremi $A = (-1,1)$ e $B = (2,4)$ percorso da A a B. Sia $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (2xy + \cos(x))\overrightarrow{i}_1 + (\log(y) + x^2)\overrightarrow{i}_2$$

   Calcolare il lavoro di $\overrightarrow{F}$ lungo Γ.

6. Sia $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(2xy^4\exp(x^2y^4) + 3x^2y^2\right)\overrightarrow{i}_1 + \left(4x^2y^3\exp(x^2y^4) + 2x^3y\right)\overrightarrow{i}_2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

   e sia Γ

$$\text{l'arco di iperbole } y = \frac{1-x}{x}, \quad \frac{1}{2} \le x \le 1$$

   Calcolare $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma$.

7. Sia $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{x}{2x^2+y^4}\overrightarrow{i}_1 + \frac{y^3}{2x^2+y^4}\overrightarrow{i}_2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

   e sia Γ la curva di equazione

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad -2 \le x \le -1$$

   Calcolare $\int_\Gamma \overrightarrow{F}$.

8. Determinare almeno un valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\oint_\Gamma \overrightarrow{F} = 0$, dove $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ è
$$\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{\alpha x}{x^2+y^2}\,\overrightarrow{i} + \frac{2y}{x^2+y^2}\,\overrightarrow{j}$$
e Γ è il bordo del quadrato di vertici $(1,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$ e $(1,1)$ percorso in senso antiorario.

9. Dato
$$\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{y-2x^2}{\sqrt{y-x^2}}\,\overrightarrow{i}_1 + \left(\frac{1}{y} + \frac{x}{2\sqrt{y-x^2}}\right)\overrightarrow{i}_2\,.$$
calcolare $I = \int_\Gamma \overrightarrow{F}$, dove Γ è il segmento di estremi $A = (0,1)$ e $B = (2,5)$, percorso da A verso B.

10. Sia
$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\frac{y}{1+xy}\right)\overrightarrow{i}_1 + \left(\frac{x}{1+xy} + y - 7\right)\overrightarrow{i}_2$$
Siano $\alpha \geq 0$ e I_α l'integrale curvilineo di $\overrightarrow{F}$ lungo il segmento Γ_α di estremi $A = (2,0)$ e $B = (0,\alpha)$, percorso da A verso B. Determinare α in modo che I_α sia minimo.

11. Dato
$$\overrightarrow{G}(x,y) = 2x\,\overrightarrow{i}_1 + 4y\,\overrightarrow{i}_2 \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$
sia (α,β) un punto appartenente alla curva $x^2+y^2 = 1$. Sia γ il segmento congiungente $(0,0)$ con (α,β). Determinare, al variare del punto (α,β), i valori
$$\max \int_\gamma \overrightarrow{G}, \quad \min \int_\gamma \overrightarrow{G}.$$

12. Sia $\alpha \neq 0$ e
$$\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{y^2}{2\alpha x^2}\,\overrightarrow{i}_1 + \left(\sin(2y)\exp(\sin^2(y)) - \frac{2y}{x}\right)\overrightarrow{i}_2$$
$$\forall\,(x,y) \in A = (0,+\infty) \times \mathbb{R}.$$
Determinare per quali valori di α il campo $\overrightarrow{F}$ è conservativo. Per tali valori, calcolare
$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\Gamma, \quad \text{con } \Gamma \text{ il segmento congiungente } A = (2,\pi) \text{ a } B = (1,0).$$