

Esercizi sulle curve

1. Determinare la retta tangente e i versori tangente e normale alla curva

$$\vec{r}(t) = \cos(t) \vec{i}_1 + \sin(t) \vec{i}_2 \quad t \in [0, 2\pi]$$

in $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri la curva

$$\vec{r}(t) = t \sin(t) \vec{i}_1 + t \cos(t) \vec{i}_2 + \alpha t^2 \vec{i}_3.$$

Determinate $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\|\vec{v}(1)\| = 2$$

3. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Una particella si muove seguendo la traiettoria

$$\vec{r}(t) = (\alpha - 2) \cos(t) \vec{i}_1 + 3 \sin(t) \vec{i}_2 + 6t \vec{i}_3 \\ t \in [0, 2]$$

Determinare per quali α il vettore velocità $\vec{v}(t)$ è ortogonale al vettore accelerazione $\vec{a}(t)$ per ogni $t \in [0, 2]$.

4. Sia

$$\vec{r}(t) = 3(t \cos(t) + \sin(t)) \vec{i}_1 \\ + 3(t \sin(t) - \cos(t)) \vec{i}_2 \quad t \in [0, 2\pi]$$

Determinare il versore tangente alla curva \vec{r} nel punto $(x_0, y_0) = (0, -3)$.

5. Calcolare la retta tangente in $(4, 5)$ a

$$\vec{r}(t) = 2t \vec{i}_1 + (1 + t^2) \vec{i}_2, \quad 1 \leq t \leq 5.$$

6. Data

$$\vec{r}(t) = 2t \vec{i}_1 - \alpha \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \vec{i}_2, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

determinare α tale che

(a) $\vec{v}(1)$ sia parallelo a $y = 3x$;

(b) $\vec{v}(1)$ sia ortogonale a $y = 2x$.

7. Calcolare la lunghezza della curva

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}t^3 + 1\right) \vec{i}_1 + \left(\frac{3}{4}t^2 - 1\right) \vec{i}_2, \quad t \in [-2, 0]$$

8. Calcolare la lunghezza di

$$\vec{r}(t) = 3\sqrt{2}t \vec{i}_1 + \log(t) \vec{i}_2 + \frac{9}{2}t^2 \vec{i}_3, \quad t \in [1, 3],$$

9. Calcolare la lunghezza di

$$\vec{r}(t) = 4(\cos(t))^2 \vec{i}_1 + 2(\cos(t) + \sin(t))^2 \vec{i}_2 \\ t \in [0, \pi]$$

10. Calcolare la lunghezza del grafico della funzione

$$f(x) = 1 - \left(1 - x^{2/3}\right)^{3/2} \quad \text{ristretta a } \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$