

Esercizi sui limiti e sullo studio della continuità per funzioni di due variabili

1. Calcolare

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$$

2.

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

3.

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

4.

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 \cos(x^2 + y^3)}{x^2 + y^2}$$

5.

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{4x^2 + y^4}$$

6. Calcolare, SE ESISTE, il limite

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^3 + y^6}$$

7.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

per

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2 + y^2} & \text{se } xy \geq 0, \\ \frac{x}{x^2 + 3y^4} & \text{se } xy < 0. \end{cases}$$

8.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

per

$$f(x, y) = \begin{cases} e^y \ln(1 + x^2) & \text{se } |y| \geq x^2, \\ \frac{x}{x^2 + y^2} & \text{se } |y| < x^2. \end{cases}$$

9. Dimostrare che il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 + 4y^4}$$

NON ESISTE.

10. Dimostrare che il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 2y^3}{x^2 + y^2}$$

NON ESISTE.

11.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \arctan\left(\frac{1}{x^2 + 2y^4}\right) \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

12.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\sin(y^3)}{y^2(x^2 + y^2)}$$

13. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\sin(x-1) - e^{x-1} + 1}{(x-1)^2 + y^2}$$

14. Dimostrare che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{(y-2)^4}{x^2 + (y-2)^2} = 0$$

15. Dimostrare che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = 0$$

16. Dimostrare che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

17.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 \sqrt{\frac{1}{2} - x^2 - y^2}}{x^2 + 2y^2}$$

18.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{e^{2(x-1)^2} - 1}{|x-1| + y^2}$$

19. Dimostrare che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{|y|} = 1$$

20. Sia $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$g(s) = \begin{cases} 7 & \text{se } 0 \leq s \leq 3, \\ 0 & \text{se } 3 < s \leq 4, \\ 1 & \text{se } s > 4, \end{cases}$$

e si definisca $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ come

$$f(x, y) = g(x^2 + y^2) \quad \text{per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Determinare l'insieme dei punti di discontinuità di f .

21. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & \text{se } y \geq 3x^2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per $\alpha \geq -1$, si denoti con r_α la retta di coefficiente angolare α passante per il punto $(-3, 0)$.
Determinare al variare di α il numero dei punti di discontinuità della restrizione di f a r_α .

22. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funz. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy^4)}{x^2 + 2y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ \alpha & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è continua su \mathbb{R}^2 .

23. Determinare i punti in cui

$$f(x, y) = \begin{cases} 2(x^2 + y^2) & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1, \\ x + 2y & \text{se } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

è discontinua.

24. (Tema d'esame del 25/03/2013) Discutere la continuità di

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 + y^2)^{\alpha-1}}{|x| + |y|} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

25. Determina per quali $\alpha > 0$ la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|y|^{7\alpha}}{3(x^2 + y^2)^{3/2}} \sin(x^2 + y^2) e^{-|y/x|} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua (in \mathbb{R}^2).

26. (Tema del 27/03/2018)

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} - \cos(x+y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

è continua in $(0, 0)$?