Sulle inverse delle funzioni iperboliche

Inversa del seno iperbolico. La funzione

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, quindi iniettiva, quindi invertibile. Poiché

$$\lim_{x \to -\infty} \sinh(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \sinh(x) = +\infty$$

e sinh è continua su $\mathbb{R}$ (infatti, è di classe C^∞ su $\mathbb{R}$), l'insieme immagine di sinh è $\mathbb{R}$. Questo sarà il dominio della sua inversa, che è quindi definita su tutto $\mathbb{R}$, e ha come insieme immagine il dominio di sinh, cioè $\mathbb{R}$. Quindi

$$\sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Ricaviamo la sua espressione analitica. Si ha

$$t = \sinh^{-1}(x) \ \Leftrightarrow \ \sinh(t) = x \ \Leftrightarrow \ \frac{e^t - e^{-t}}{2} = x.$$

Ora dall'ultima espressione ricaviamo t in funzione di x:

$$\begin{aligned}
& e^t - \frac{1}{e^t} = 2x \quad \Leftrightarrow \\
& e^{2t} - 1 = 2e^t x \quad \Leftrightarrow \\
& e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \ \text{(ponendo } z = e^t\text{)} \\
& z^2 - 2xz - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \\
& z = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} \quad \Leftrightarrow \\
& z = x \pm \sqrt{x^2 + 1}
\end{aligned}$$

Ora si osservi che $z = e^t$ deve essere positivo. Pertanto

$$z = x + \sqrt{x^2 + 1} \ \Rightarrow \quad e^t = x + \sqrt{x^2 + 1} \ \Rightarrow \quad t = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Quindi

$$\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

N.B.: per $\sinh^{-1}$ si usa anche la notazione SettSh.

L'inversa del coseno iperbolico. La funzione

$$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

è pari $\mathbb{R}$, quindi NON iniettiva su tutto $\mathbb{R}$. Sono iniettive le restrizioni di cosh alla semiretta $(-\infty, 0]$ (tale restrizione è strettamente decrescente) e alla semiretta $[0, +\infty)$ (tale restrizione è strettamente crescente). Si conviene di invertire la restrizione di cosh a $[0, +\infty)$ e si denota con il simbolo $\cosh^{-1}$ (o SettCh) tale inversa. Si ha che

$$\begin{aligned} &\text{il dominio di } \cosh^{-1} \text{ è l'insieme immagine di } \cosh|_{[0,+\infty)}, \text{ quindi è } [1, +\infty); \\ &\text{l'insieme immagine di } \cosh^{-1} \text{ è il dominio di } \cosh|_{[0,+\infty)}, \text{ quindi è } [0, +\infty). \end{aligned}$$

Ricaviamo l'espressione analitica di $\cosh^{-1}$. Si ha

$$t = \cosh^{-1}(x) \ \Leftrightarrow\ \cosh(t) = x \ \Leftrightarrow\ \frac{e^t + e^{-t}}{2} = x.$$

Ora dall'ultima espressione ricaviamo t in funzione di x:

$$\begin{aligned} & e^t + \frac{1}{e^t} = 2x \quad \Leftrightarrow \\ & e^{2t} + 1 = 2e^t x \quad \Leftrightarrow \\ & e^{2t} - 2xe^t + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \ (\text{ponendo } z = e^t) \\ & z^2 - 2xz + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \\ & z = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} \quad \Leftrightarrow \\ & z = x \pm \sqrt{x^2 - 1} \end{aligned}$$

Ora si noti che $x = \cosh(t) \geq 1$, quindi $\sqrt{x^2 - 1}$ è ben definita. Inoltre, si deve avere $\cosh^{-1}(x)$ positivo, visto che l'insieme immagine di $\cosh^{-1}$ è $[0, +\infty)$. Pertanto,

$$z = x + \sqrt{x^2 - 1} \ \Rightarrow\ e^t = x + \sqrt{x^2 - 1} \ \Rightarrow\ t = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Quindi

$$\cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \forall\, x \in \mathrm{dom}(\cosh^{-1}) = [1, +\infty).$$