

Scritto di Analisi Matematica B – 01 Febbraio 2021

Tempo a disposizione: 75 minuti

Esercizio 1. Si consideri il campo scalare

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\arctan(7x^2y)(1 + \sin(xy^2))}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. f è continuo in $(0, 0)$?
2. Calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ per ogni versore $v = (v_1, v_2)$.
3. f è differenziabile in $(0, 0)$?

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 2. Determinare i punti e i valori di estremo assoluto della funzione

$$f(x, y) = \arctan((x - 1)^2 + (y + 1)^2)$$

sul trapezio T di vertici $A = (0, 1)$, $B = (0, 3)$, $C = (-1, 0)$, $D = (-3, 0)$.

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 3. Si consideri il campo vettoriale piano

$$\vec{F}(x, y) := \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{\sin(y^3)}{x^{3/2}} \right) \vec{i} + \left(\frac{3y^2 \cos(y^3)}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \vec{j}.$$

1. Determinare il dominio di \vec{F} e discutere la sua conservatività.
2. Calcolare la circuitazione di \vec{F} lungo la circonferenza di centro il punto $(2, 2)$ e raggio 1.
3. Calcolare l'integrale di \vec{F} lungo la curva grafico della funzione $f(x) = \log(x)$, $x \in [e^2, e^4]$.

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 4. Calcolare l'integrale doppio della funzione

$$f(x, y) = -2y - x^2 - y^2$$

sul disco chiuso

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 2y \leq 0\}.$$

Suggerimento: completare il quadrato nella definizione dell'insieme D ...

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 5. Rispondere alle seguenti domande:

- (a) Si consideri l'equazione differenziale ordinaria di ordine 2

$$ay''(x) + by(x) + c = f(x).$$

Scrivere la formula l'integrale generale dell'associata equazione omogenea nei casi in cui

1. la relativa equazione caratteristica abbia 2 radici reali distinte λ_1, λ_2 ;
 2. la relativa equazione caratteristica abbia una radici reale λ di molteplicità 2.
- (b) Dare la definizione di punto di estremo relativo ed enunciare il teorema di Fermat.
- (c) Dare la definizione di campo irrotazionale e il teorema sul rapporto fra conservatività e irrotazionalità.
- (d) Dimostrare, a scelta, uno dei suddetti teoremi.

[Punteggio: 8 punti]