

Scritto di Analisi Matematica B – 11 Gennaio 2021

Tempo a disposizione: 75 minuti

Esercizio 1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri il campo scalare

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(y^2) - xy^2}{(x^2 + y^2)^{\alpha+5}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Per quali valori f è continuo in $(0, 0)$?
2. Calcolare $\nabla f(0, 0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Discutere la differenziabilità di f in $(0, 0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 2. Determinare i punti e i valori di estremo assoluto che la funzione

$$f(x, y) = y - (x - 1)^2$$

assume sul triangolo T di vertici $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$.

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 3. Si consideri la curva γ parametrizzata dalla funzione

$$\vec{r}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{r}(t) := (\cos(t) - t \sin(t))\vec{i} + (\sin(t) + t \cos(t))\vec{j}.$$

1. Dato il campo

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{2x}{1+x^4}y + 3x^2 \sin(y^3) \right)\vec{i} + (\arctan(x^2) + 3x^3y^2 \cos(y^3))\vec{j}$$

si verifichi che esso è conservativo e se ne calcoli un potenziale.

2. Calcolare

$$\int_{\gamma} \vec{F}$$

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 4. Si consideri il campo scalare $\varphi(x, y) = xy$, e sia $\|\nabla\varphi(x, y)\|$ la norma euclidea del suo gradiente. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \sqrt{2 + \|\nabla\varphi(x, y)\|^2} \, dx \, dy$$

sul dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|\nabla\varphi(x, y)\|^2 \leq 25\}.$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 5. Rispondere alle seguenti domande:

- (a) Dare la definizione di campo conservativo.
- (b) Dare la definizione di campo irrotazionale e il teorema sui rapporti fra conservatività e irrotazionalità.
- (c) Enunciare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale per l'integrale di Riemann.
- (d) Dimostrare, a scelta, uno dei suddetti teoremi.

[Punteggio: 8 punti]