Scritto di Analisi Matematica B – 22 Giugno 2020

Tempo a disposizione: 75 minuti

Esercizio 1. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 3x^2(1 - 4e^{-y(x)}) \\ y(0) = \log(5) \end{cases}$$

[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 2. Si consideri il campo scalare

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x^2)\sin(y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. f è continuo in $(0,0)$?
2. Calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ per ogni versore $v = (v_1, v_2)$
3. f è differenziabile in $(0,0)$?

[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 3. Si consideri il campo scalare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 6x^2y(x-y) + 3\,.$$

Verificare che i punti dell'asse y sono stazionari per f e classificarli.
[Punteggio: 5 punti]

Esercizio 4. Si consideri il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\frac{2xy^2}{1+x^2y^2} + \frac{1}{2(1+x^2)(\sqrt{\arctan(x)})^3}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{2yx^2}{1+x^2y^2} - 9y^2\sin(3y^3)\right)\overrightarrow{j}\,.$$

Determinare $\mathrm{dom}(\overrightarrow{F})$. Delle seguenti affermazioni:

1. $\overrightarrow{F}$ è conservativo;
2. $\oint_\gamma \overrightarrow{F} = 5\pi$, ove γ è la circonferenza di centro $(2,0)$ e raggio 1, percorsa 1 sola volta in senso antiorario;
3. Il campo scalare

   $$\varphi(x,y) = \log(1+x^2y^2) + \cos(3y^3) - \frac{1}{\sqrt{\arctan(x)}} + 58$$

   definito sul suo dominio naturale, è un potenziale per $\overrightarrow{F}$;
4. $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) \equiv 11$ per ogni $(x,y) \in \mathrm{dom}(\overrightarrow{F})$;

5. L'integrale curvilineo $\int_\gamma \overrightarrow{F}$, ove γ è il segmento congiungente il punto $(\frac{1}{2}, 1)$ al punto (1,3), vale $\log(8) + \cos(81) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} - \cos(3) + (\arctan\left(\frac{1}{2}\right))^{-1/2}$.

tutte e sole quelle corrette sono... **Giustificare accuratamente ogni risposta**.
[Punteggio: 6 punti]

Esercizio 5. Rispondere alle seguenti domande:

(a) Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, $\varphi : A \to \mathbb{R}$ un campo scalare e $x_0 \in A$. Dare la definizione di "x_0 è un punto di massimo relativo per φ"; "x_0 è un punto di minimo relativo per φ".

(b) Scrivere l'enunciato del secondo teorema fondamentale del calcolo per l'integrale di Riemann.

(c) Scrivere l'enunciato del teorema di caratterizzazione dei campi conservativi (o *Teorema dell'equivalenza delle tre condizioni*).

(d) Dimostrare, a scelta, il secondo teorema fondamentale del calcolo per l'integrale di Riemann, oppure una delle implicazioni del teorema di caratterizzazione dei campi conservativi.

[Punteggio: 8 punti]