Serie di Fourier

Riccarda Rossi

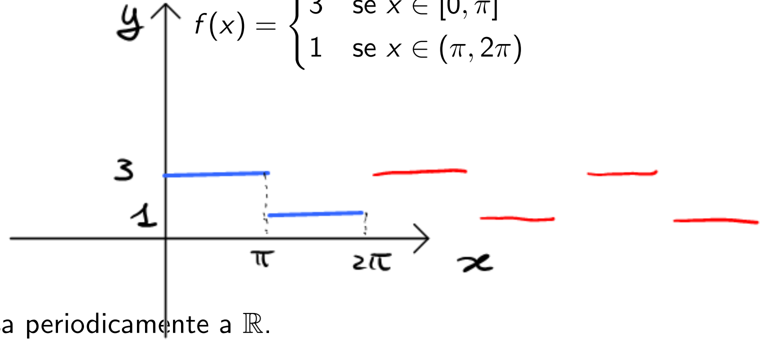
Università di Brescia

Analisi II

Es. 11.

Sviluppare in serie di Fourier

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \in [0, \pi] \\ 1 & \text{se } x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$



ed estesa periodicamente a $\mathbb{R}$.

- La serie di F. associata è

$$f \sim 2 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

VERIFICARLO

- Discutere convergenza puntuale e uniforme sugli intervalli $[0, 2\pi]$ e $[\pi/4, \pi/3]$.

Su $[0, 2\pi]$ si applica il teorema di convergenza puntuale (f è di classe C^1 a tratti e in ogni punto esistono le pseudo derivate destra e sinistra).

Quindi $\forall x \in [0, 2\pi]$ si ha che

$\lim_{k \to \infty} S_k(x) = g(x)$ con

$$g(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} 3 & x \in]0, \pi[\\ 1 & x \in]\pi, 2\pi[\\ 2 & x = 0, \pi, 2\pi \end{cases}$$

Siccome g non è continua, la convergenza non può essere uniforme

- su $[\pi/4, \pi/3]$ f è continua. Si applica il teorema della convergenza uniforme, e quindi $S_k \to f$ uniform. su $[\pi/4, \pi/3]$

Per $x = \frac{\pi}{2}$, la serie converge a $f(\pi/2) = 3$:

notare che $g(\pi/2) = f(\pi/2)$ perché f è continua in $\pi/2$

$$\Rightarrow 3 = 2 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\pi/2)}{2k+1}$$

dunque si ha

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)\frac{\pi}{2})}{2k+1} = 1.$$

Siccome $\sin((2k+1)\pi/2) = (-1)^k$ (VERIFICARE)

concludiamo che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$