

# Formule di Gauss-Green

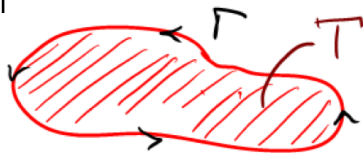
Riccarda Rossi

Università di Brescia

**Analisi II**

## Richiami di teoria

- $\Gamma$  curva chiusa in  $\mathbb{R}^2$ , regolare a tratti, percorsa in senso antiorario
- $T \subset \mathbb{R}^2$  regione "interna" a  $\Gamma$



- $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{F} = F_1 \vec{i}_1 + F_2 \vec{i}_2$ ,  $\vec{F} \in C^1(A)$ ,  $A$  insieme aperto contenente  $T$  e il sostegno di  $\Gamma$

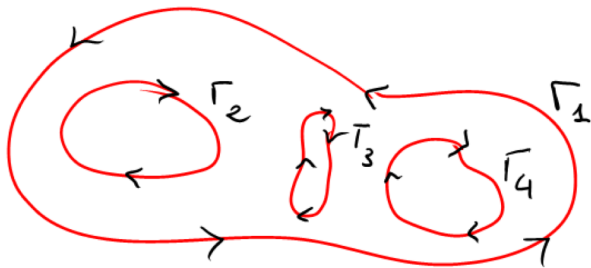
$$(1) \iint_T \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy = \oint_{\Gamma} F_2 dy = \oint_{\Gamma} (0 \vec{i}_1 + F_2 \vec{i}_2) \cdot d\Gamma$$

$$(2) - \iint_T \frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy = \oint_{\Gamma} F_1 dx = \oint_{\Gamma} (F_1 \vec{i}_1 + 0 \vec{i}_2) \cdot d\Gamma$$

$$(3) \iint_T \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy$$

- $T$  NON semplicemente connesso:

$$\iint_T \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\Gamma_1 - \sum_{k=2}^n \oint_{\Gamma_k} \vec{F} \cdot d\Gamma_k$$



# Casi particolari

## 1. Area di una regione piana

$$\text{Area}(T) = \oint_{\Gamma} x \, dy$$

$$\text{Area}(T) = - \oint_{\Gamma} y \, dx$$

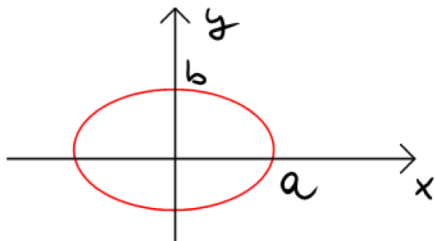
$$\text{Area}(T) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (x \, dy - y \, dx)$$

Calcolare l'area di

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\},$$

dove  $a > 0$ ,  $b > 0$  sono fissati.

---











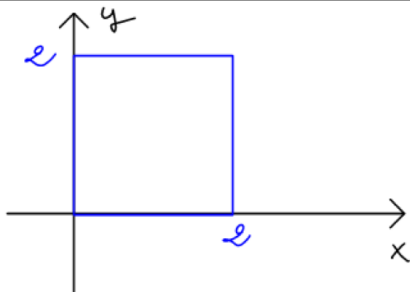


## Es. 2.

$$\oint_{\Gamma} (x^3 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy$$

dove  $\Gamma$  è il perimetro del quadrato  $D = [0, 2] \times [0, 2]$  percorso in senso antiorario.

---











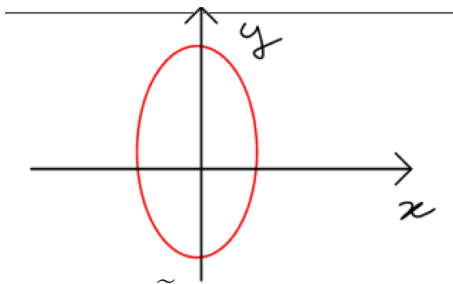


### Es. 3.

$$I = \oint_{\Gamma} (e^{x^4} - y) dx + [x^3 + \sinh(3y^2)] dy$$

dove  $\Gamma$  è l'ellisse  $9x^2 + 4y^2 = 36$  percorso due volte in senso orario.

---



























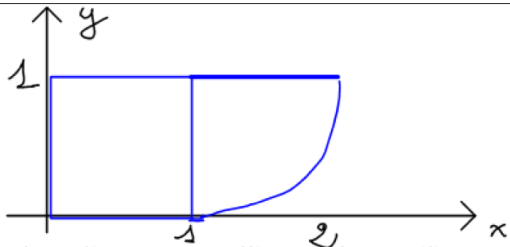
## Es. 4.

Sia  $A = Q \cup D$ , con

$$\begin{cases} Q = [0, 1] \times [0, 1] \\ D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1, \\ \quad 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\} \end{cases}$$

e sia  $\Gamma$  il bordo di  $A$ , orientato positivamente. Si calcoli l'integrale

$$\oint_{\Gamma} (x^3 - y) dx + (x + y) dy$$



- Non conviene calcolare direttamente l'integrale curvilineo: dovrei "spezzarlo" in 4 integrali, essendo  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ .











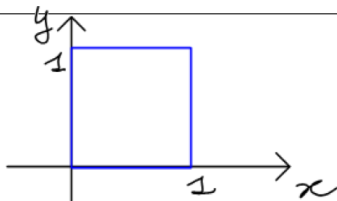




## Es. 5.

Sia  $\Gamma$  la curva bordo del quadrato  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ , orientata in **senso orario**. Si calcoli

$$\oint_{\Gamma} \frac{x}{1+y} dx - (\sin(y) + x^2 y) dy$$



- Conviene applicare la formula di Gauss-Green “al rovescio” per evitare di parametrizzare i 4 lati del quadrato.





















