

Es. 9.

Sia

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - |x| & \text{se } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie

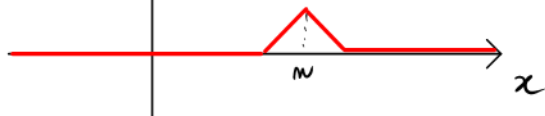
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} g(x - n)$$

Poniamo $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} g(x - n)$.

y

$x \in [n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$

0 altrove

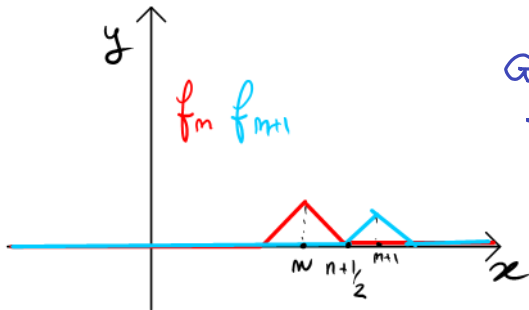


Convergenza puntuale

Studio la successione delle somme
parziali

$$S_K(x) = \sum_{n=1}^K f_n(x) = f_1(x) + \dots + f_K(x)$$

Per capirla, vedo come si somma
mo $f_n(x)$ e $f_{n+1}(x)$ per un
certo n



Gli sistemi dove
 f_n e f_{n+1} sono
diversi da zero
sono DISGIUNTI

In generale, dati 2 indici n e m ,
 $n \neq m$, gli insiemi dove $f_m(x) \neq 0$
 e $f_n(x) \neq 0$ sono disgiunti

$\Rightarrow$ Per $x \in \mathbb{R}$ fissato, $\exists$ al massimo
 un solo indice $m_0 = m_0(x) \in \mathbb{N}$
 tale che $f_{m_0}(x) \neq 0$. *che dipende
 da x !*

In fatti,

$\cdot x < 0 \Rightarrow f_n(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_k(x) = 0 \quad \forall k.$
 $\cdot x \geq 0 \Rightarrow \exists! m_0 \in \mathbb{N}$ tale che
 $f_{m_0}(x) \neq 0$

$$\Rightarrow S_k(x) = \sum_{n=1}^k f_n(x)$$

$$= \begin{cases} f_{m_0}(x) & \text{se } k \geq m_0 \\ 0 & \text{se } k < m_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall x > 0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(x) = f_{m_0}(x)$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ha convergenza assoluta}$$

di

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) !$$

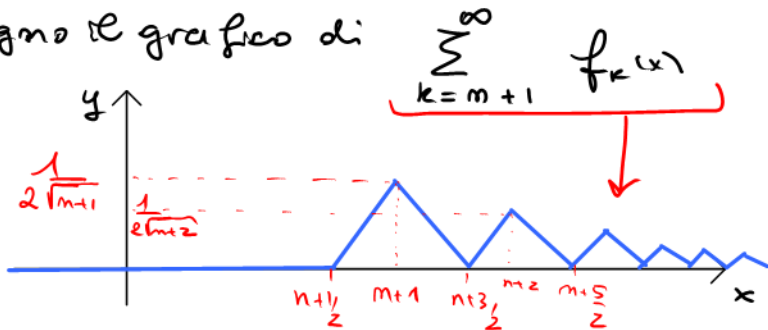
Convergenza uniforme Per ogni $n \geq 1$ sia:

$$S_n = \sum_{k=1}^n f_k$$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente ad S in $\mathbb{R}$ se e solo se $\{S_n\}_{n \geq 1}$ converge ad S uniformemente in $\mathbb{R}$, cioè

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |S_n(x) - S(x)| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| = 0 \end{aligned}$$

Disegno il grafico di



$$\Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} f_k(x) \right| =$$

$$\max_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} f_k(x) \right| = \frac{1}{2\sqrt{m+1}}$$

$$\Downarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} f_k(x) \right| = 0$$

$\Rightarrow S_m \rightarrow S$ uniform. su $\mathbb{R}$

Convergenza totale?

ho converg. totale in $\mathbb{R}$ se e solo se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \text{ converge}$$

Ora $\forall n \geq 1$

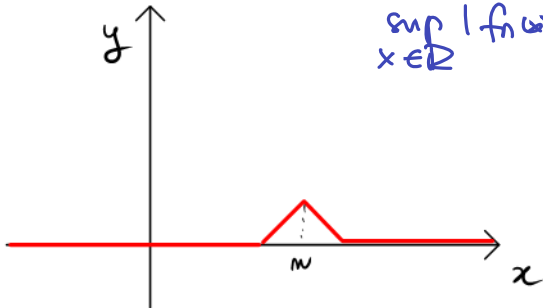
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} f_n(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\text{e } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

DIVERGE

$\Rightarrow$ non ho converg. TOTALE in $\mathbb{R}$



N.B. Questo è un esempio in cui
la serie converge uniformemente
MA NON TOTALMENTE.