

Studi qualitativi per problemi di Cauchy

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi II

Es. 1.

Dimostrare che la soluz.

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(t + y^2) \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

esiste ed è unica, e che il suo dominio massimale di definizione è $\mathbb{R}$.

Es. 2.

Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ esist. locale per

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y-t} \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

Qua $f(t, y) = \sqrt[3]{y-t}$

$f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ - Studia la sua
derivabilità rispetto a y .

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = \begin{cases} \frac{1}{3(y-t)^{2/3}} & \text{se } t \neq y \\ t & \text{se } t = y \end{cases}$$

(inoltre: considero (t_0, y_0) con $y_0 = t_0$.)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t_0, t_0) \stackrel{\text{per def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0, t_0+h) - f(t_0, t_0)}{h} =$$

$$\equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(t_0+h)-t_0} - \sqrt[3]{t_0-t_0}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = +\infty$$

Quindi $\frac{\partial f}{\partial y}$ esiste $= \frac{1}{3(y-t)^{2/3}}$

solo su $\mathbb{R}^2 \setminus D$, con $D = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 / y = t\}$

Es. 3.

Determinare l'intervallo massimale di definizione per le soluz. di

$$(1) \quad \begin{cases} y'(t) = t + \sqrt{y^2 + 2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{t-1} + \sqrt{y^2 + 2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Ip. del teor. di $\exists!$ locale per (1)

$$f(t, y) = t + \sqrt{y^2 + 2} \in C^0(\mathbb{R}^2) \\ \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

24
25 f è ben def e cont. su $\mathbb{R}^2$ perché $y^2 + 2 \geq 2!$
l'argom. $\sqrt{\quad}$ non si annulla!!

Ok teor. Il locale

Ipotesi della teor. Il globale:

$\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ striscia verticale
✓

crescita sublineare?

$\exists k_1, k_2 \geq 0: \forall (t, y) \in \mathbb{R}^2$

$$|f(t, y)| \leq k_1 + k_2 |y|$$

$f(t,y) = t + \sqrt{y^2 + 2}$ che cresce sublin.
in y

• non su tutto $\mathbb{R}^2$,
ma su $[-M, M] \times \mathbb{R}$,
 $\forall M > 0$,

Infatti, $\forall (t,y) \in [-M, M] \times \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} |f(t,y)| &\leq |t| + |\sqrt{y^2 + 2}| \\ &\leq |t| + \sqrt{y^2 + 2} \\ &\leq M + |y| + \sqrt{2} \end{aligned}$$

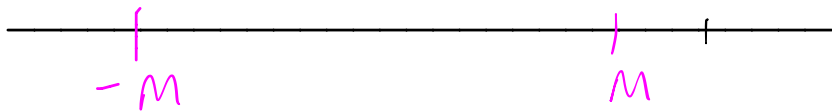
$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{u+v} \leq \\ \sqrt{u} + \sqrt{v} \\ \forall u, v \geq 0 \end{array} \right]$$

Allora il teor. di $\exists!$ globale si applica a f ristretta a

$$[-M, M] \times \mathbb{R}, \quad \forall M > 0.$$

$\Rightarrow$ L'intervallo massimale di $\exists$ è

$$[T_{\min}, T_{\max}] = [-M, M], \quad \underline{\underline{\forall M > 0}}$$



Per l'arbitrarietà di M , il
dominio massimale di $\exists$ è $\mathbb{R}$

2° pb. di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{t-1} + \sqrt{y^2 + 2} = f(t, y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$\text{dom}(f) = (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \times \mathbb{R}$ - In realtà,

negli enunciati dei teor. si considera

$$\text{dom}(f) = I \times Y, \quad \text{con}$$

I intervallo, $I \ni t_0$ (dove è data
condiz. di
Cauchy).

Qu: $I \ni 0$, I intervallo $\subseteq \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\Rightarrow I = (-\infty, 1)$ - Quindi, di fatto

considero $\text{dom}(f) = (-\infty, 1) \times \mathbb{R}$

- $\text{dom}(f)$ è striscia verticale ($y = \mathbb{R}$)
- per applicare teor. $\exists$ globale, devo controllare se f ha crescita sublineare in y .

Qui:

$$|f(t, y)| \leq \left| \frac{1}{t-1} \right| + \sqrt{y^2 + 2}$$

$$\stackrel{t \in (-\infty, 1)}{=} \frac{1}{1-t} + |y| + \sqrt{2}$$

Per avere crescita sublineare in y ,
devo stimare $\frac{1}{1-t}$ con costante.

Quindi non mi posso "avvicinare" a 1.

Allora considero f definita su

$(-\infty, b] \times \mathbb{R}$, con $b < 1$, arbitrario
2.0.

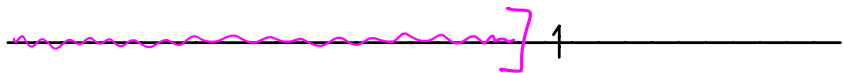
$\forall (t, y) \in (-\infty, b] \times \mathbb{R}$,

$$|f(t, y)| \leq \frac{1}{1-b} + |y| + \sqrt{2}$$

OK
CRESCITA
SUBLINEARE

Il teor. di $\exists!$ globale applicato a
 $f: (-\infty, b] \times \mathbb{R}$ implica che

$$[T_{\min}, T_{\max}] = (-\infty, b] \quad \forall b < 1$$



Se come b è ARBITRARIO, il dominio
massimale è $(-\infty, 1)$

Es. 4.

Verif. che la sol. di

$$\begin{cases} y' = (y + 1)^3 \sin(y) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

è limitata e strettamente crescente.

Es. 5.

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la monotonia di sol. di

$$\begin{cases} y' = \arctan(t)e^y(y-1)(y-2) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Es. 6.

Dimostrare che la sol. di

$$\begin{cases} y' = -(y - 3) \arctan(\log(y^2 + 1)) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

è definita su tutto $\mathbb{R}$ e calcolare

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t).$$

Es. 7.

$$\begin{cases} y' = -(y - 2) \arctan^2(y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Es. 8.

Dato

$$\begin{cases} y' = e^{-y^2} + t^4 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

- (1) Dimostrare che esiste un'unica soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$
 - (2) la soluzione $y(t)$ è dispari?
 - (3) Calcolare $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$.
-

Es. 9.

Dato

$$\begin{cases} y'(t) = \arctan(t) (y(t) - \arctan(y(t))) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

studiarne la soluzione al variare del dato $y_0 \in \mathbb{R}$.

Es. 10.

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan(y) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

dimostrare che la soluzione

- ① è definita su tutto $\mathbb{R}$
- ② è strettamente monotona per $\alpha \neq 0$
- ③ è convessa se $\alpha > 0$, concava se $\alpha < 0$
- ④ calcolare

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$$

$$1). \quad f(t, y) = \arctan(y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

• ok $\exists!$ locale

• $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s'innescava verticale

• crescita sublineare in y ? ok

$$|f(t, y)| = |\arctan(y)| \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\forall (t, y) \in \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow \exists!$ globale ok, $(T_{\min}, T_{\max}) = \mathbb{R}$

2) Soluz. staz: $y(t) \equiv c$, dove $c \in \mathbb{R}$
è tale $\text{arcom}(c) = 0$
che

$\Rightarrow$ ho 1 soluz. staz: $y(t) \equiv 0$.

Distinguo 2 casi

/ $\alpha = y(0) > 0$

\ $\alpha < 0$

Caso $\boxed{\alpha > 0}$ $y(0) > 0$.

- per il teor. di confronto fra 2 soluz. locali

$$\text{ho } y'(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y'(t) = \arctan(y(t)) > 0$$

$\Rightarrow y$ è strett. cresc. su $\mathbb{R}$.

Limiti agli estremi di $\text{dom}(f)$

Per monotonia,

$$\exists L_- = \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t), \quad L_- \in [0, \alpha)$$

$$\exists L_+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t), \quad L_+ \in (\alpha, +\infty]$$

Per calcolare L_- , L_+ uso il teor.
dell'asintoto.

Applico teor. esentato per $t \rightarrow -\infty$:

$$L_- \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned}\exists \lim_{t \rightarrow -\infty} y'(t) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \arctan(y(t)) \\ &= \arctan(L_-)\end{aligned}$$

$$\text{Allora, } \arctan(L_-) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{L_- = 0}$$

Per $t \rightarrow +\infty$, dimostriamo che $L_+ = +\infty$
 $(L_+ \in (\alpha, +\infty])$

Per assurdo, sia $L_+ \in \mathbb{R}$.

Siccome $\lim_{t \rightarrow +\infty} y'(t) = \arctan(L_+)$,

per il teor. asintotico,

$\arctan(L_+)$ dovrebbe essere $= 0$

$\Rightarrow L_+ = 0$. Assurdo, visto che

Convesità / concavità ($\alpha > 0$)

$$y''(t) = \frac{d}{dt} (y'(t))$$

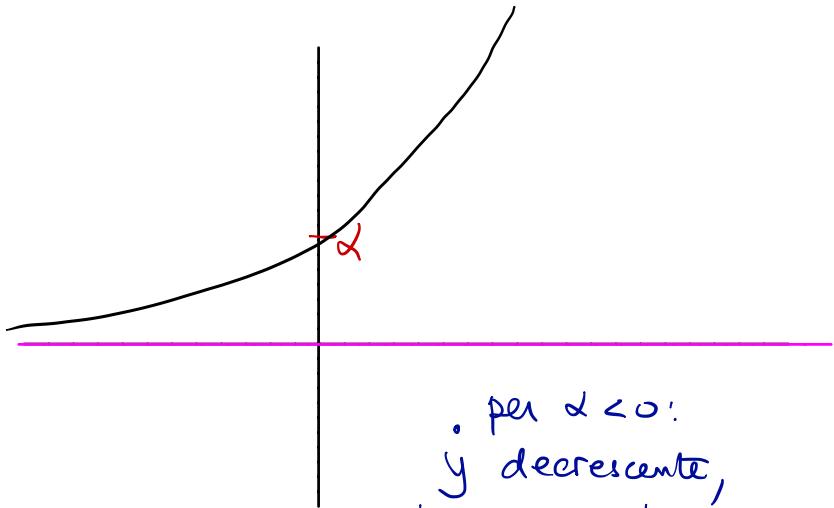
$$= \frac{d}{dt} (\arctan(y'(t)))$$

$$= y'(t) \cdot \frac{1}{1 + y'^2(t)}$$

$> 0 \quad \forall t$

$\Rightarrow \text{sgn}(y'') = \text{sgn}(y')$ y è convesso

$\Rightarrow y''(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$



• per $\alpha < 0$:
y decrescente,
 $L_- = 0$, $L_+ = -\infty$
y concava su $\mathbb{R}$

Es. 11.

Al variare di $0 < \alpha < 2\pi$ studiare la soluzione di

$$\begin{cases} y' = 2 \sin(y) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

• $f(t, y) = 2 \sin(y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ -
ok $\exists!$ locale.

- $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $|f(t, y)| \leq 2$

ok $\exists!$ globale.

$\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}, (T_{\min}, T_{\max}) = \mathbb{R}$

. sol. stazionarie:

$$y(t) \equiv k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

In particolare, fna 0 e 2π

ho 3 soluz. staz:

$$y(t) \equiv 0 \quad \leftarrow \quad \alpha = 0$$

$$y(t) \equiv \pi \quad \leftarrow \quad \alpha = \pi$$

$$y(t) \equiv 2\pi \quad \leftarrow \quad \alpha = 2\pi$$

2 casi

$$0 < \alpha < \pi \quad (\text{A CASA})$$

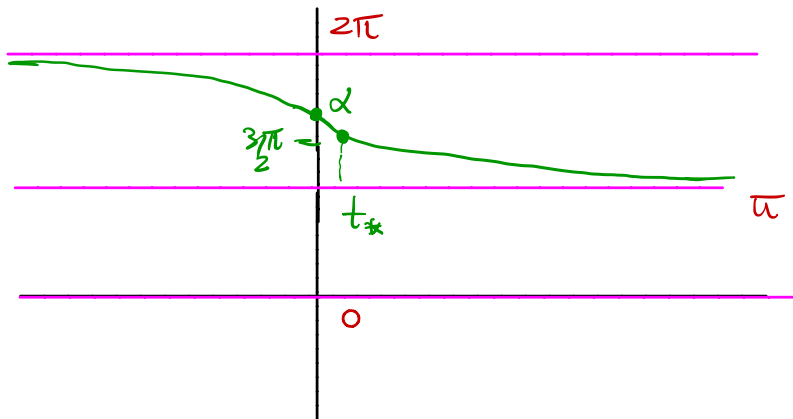
$$\pi < \alpha < 2\pi$$

$$\bullet \pi < y(0) = \alpha < 2\pi$$

$$\downarrow$$
$$\pi < y(t) < 2\pi \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\downarrow$$
$$y'(t) = 2 \sin(y(t)) < 0$$

$\Rightarrow$ y è strett. decrescente su $\mathbb{R}$



Per monotona, $\exists L_- = \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t)$ $\in (\alpha, 2\pi]$

$\exists L_+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ $\in [\pi, \alpha)$

Per teor. asintoto, (ϵ_s : dettagli!)

$$L_- = 2\pi, \quad L_+ = \pi$$

$$\begin{aligned}
 y''(t) &= \frac{d}{dt} (y'(t)) = \\
 &= \frac{d}{dt} (2 \sin(y(t))) = \\
 &= y'(t) 2 \cos(y(t))
 \end{aligned}$$

Se $\alpha \in (\pi, 2\pi)$, $y'(t) < 0 \forall t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}(y''(t)) = - \operatorname{sgn}(\cos(y(t)))$$

Ricardo

$$\cos(z) \begin{cases} \geq 0 & \frac{3\pi}{2} \leq z \leq 2\pi \\ \leq 0 & \pi \leq z \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} \begin{cases} \leq 0 & \text{se } \frac{3\pi}{2} \leq y(t) < 2\pi \\ \geq 0 & \text{se } \pi < y(t) < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

y strett. decrescente, quindi

$\exists! t_* \in \mathbb{R}$ tale che

$$y(t_*) = \frac{3}{2}\pi$$

e per $t < t_*$, $y(t) > \frac{3}{2}\pi$

per $t > t_*$, $y(t) < \frac{3}{2}\pi$

$\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} y \text{ è CONCAVA su } (-\infty, t_{\star}) \\ y \text{ è CONVESSA su } (t_{\star}, +\infty), \\ t_{\star} \text{ è di flesso per } y \end{array} \right.$

Es. 12.

Dimostrare che le soluzioni di

$$\begin{cases} y' = e^y \sin(y) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

sono definite su $\mathbb{R}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$f(t, y) = e^y \sin(y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \\ \Rightarrow \text{ok } \exists! \text{ locale.}$$

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \underline{\text{ma}}$$

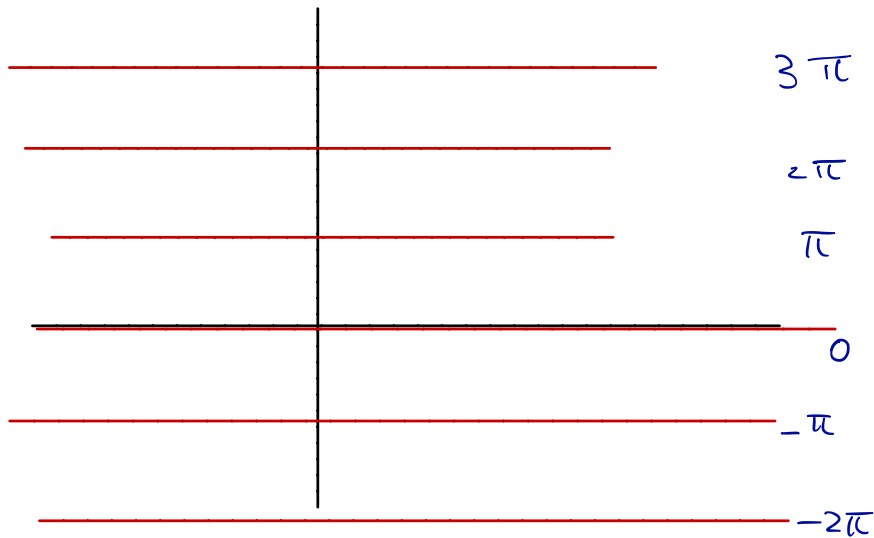
$f(t, y) = e^y \sin(y) \neq$ non ha crescita sublineare in y .

Sospendo la questione su
($T_{\min}$, $T_{\max}$).

SOLUZ. STAZIONARIE, $f(t, y) = e^y \sin(y)$

$\Rightarrow \infty$ soluz. staz,

$$y(t) \equiv k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$



• Se $\alpha = k\pi$, per $k \in \mathbb{Z}$,
 $\rightarrow y(t) \equiv k\pi$, $\forall t \in \mathbb{R}$

• Altrimenti , di sicuro

$\exists ! \bar{k} \in \mathbb{Z}$ tale che

$$(\bar{k}-1)\pi < \alpha < \bar{k}\pi \rightarrow (\bar{k}-1)\pi < y(t) < \bar{k}\pi$$

(cioè α è compreso fra
2 multipli interi di π)

$$(\bar{k}-1)\bar{u} < y(t) < \bar{k}\bar{u}$$

$$\forall t \in (T_{\min}, T_{\max})$$



L'ipotesi di crescita sublineare
 è verificata lungo la soluz

$$|f(t, y(t))| = e^{y(t)} |\sin(y(t))| \leq C$$

$$\Rightarrow (T_{\min}, T_{\max}) = \mathbb{R} \quad \bigg| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Questo ragionamento funziona tutte

le volte che riesco a provare

che $\exists M > 0: \quad \forall t \in (T_{\min}, T_{\max})$

$$|y(t)| \leq M$$

Un risultato di prolungamento

Nelle ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale, se u è una soluzione del problema di Cauchy e $K \subset A$ un compatto tale che

$$\boxed{\text{graf}(u) \subset K,} \rightarrow \text{questo è vero se}$$

allora il dominio di definizione di u non è massimale.

- $\text{dom}(u) = [a, b]$

- $\exists M > 0 : \forall t \in [a, b],$
 $|u(t)| \leq M$

Es. 13. (Tema d'esame del 14/01/2013)

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t \cdot \frac{4-y^2}{y} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

determinare al variare di $y_0 \neq 0$ se il problema ammette esistenza e unicità locale e globale. Studiare monotonia, eventuali simmetrie della soluzione, e i limiti agli estremi del dominio di definizione.

$$f(t, y) = t \cdot \frac{4-y^2}{y}$$

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$$

NON È STRISCIA VERTICALE

$f \in C^1(\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}))$ — ok $\exists!$

locale
 $\forall y_0 \neq 0$

• non posso

applicare teor. $\exists!$ globale.

non so se $(T_{\min}, T_{\max}) = \mathbb{R}$.

• soluz. STAZIONARIE :

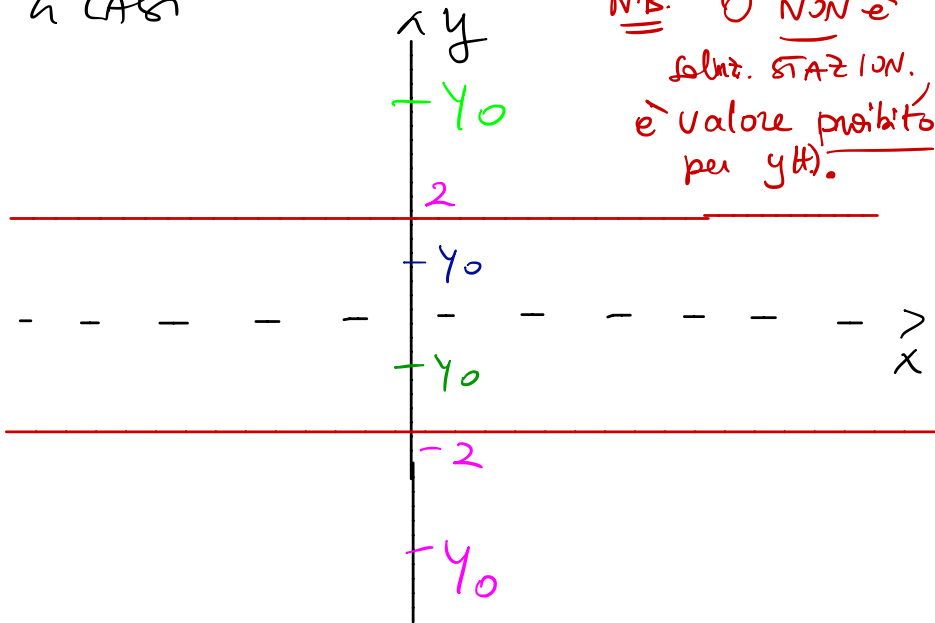
$$f(t, y) = t \cdot \frac{4-y^2}{y} = 0 \quad (\forall t) \Leftrightarrow y = \pm 2$$

2 soluz. STAZ.

$$y(t) \equiv 2 \quad (y_0 = 2)$$

$$y(t) \equiv -2 \quad (y_0 = -2)$$

4 CASI



1). $y_0 < -2$

2). $y_0 \in (-2, 0)$

3). $y_0 \in (0, 2)$

4). $y_0 > 2$

} esercizio

$$1) \underline{y_0 < -2}$$

$$y(1) = -2 \quad e^{-\alpha} \text{ al. } \delta \Gamma A \mathbb{Z}.$$

↓

$$y(t) < -2$$

$$\forall t \in (T_{\min}, T_{\max})$$

$$y'(t) = t.$$

$$4 - y^2(t)$$

$$\frac{4 - y^2(t)}{y(t)}$$

< 0

< 0

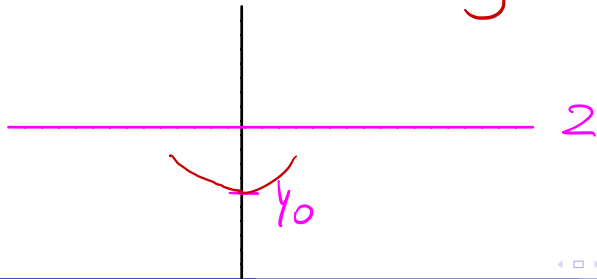
> 0

$$\rightarrow \text{sgn}(y'(t)) = \text{sgn}(t).$$

$\Rightarrow$

su $(0, T_{\max})$, $y'(t) > 0 \Rightarrow$
 y è crescente

su $(T_{\min}, 0)$, $y'(t) < 0 \Rightarrow$
 y decrescente



Quindi $\forall t \in (T_{\min}, T_{\max})$,

$$y_0 < y(t) < -2$$

$$\Rightarrow (T_{\min}, T_{\max}) = \mathbb{R} !$$

Si verifica che $y(t)$ è PARI,

Què, introducendo

$$z(t) = y(-t),$$

si verifica che z risolve

$$\begin{cases} \bullet & z' = t \cdot \frac{4-z^2}{z} \\ \bullet & z(0) = y_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z(t) = y(t) !$$

$$\Rightarrow y(t) = y(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

• Se come y è PARI, lo studio solo su $[0, +\infty)$

• Per monotonia, $\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = L_+$

$$y \text{ cresc} \Rightarrow y_0 < L_+ \leq -2$$

Con il teor. ASINTOTO: $L_+ = -2$

(per PARITÀ, $L_- = -2$)

$$-2 < y_0 < 0$$

$$\Downarrow$$

$$-2 < y(t) < 0$$

$$\Downarrow$$

$$y'(t) = t.$$

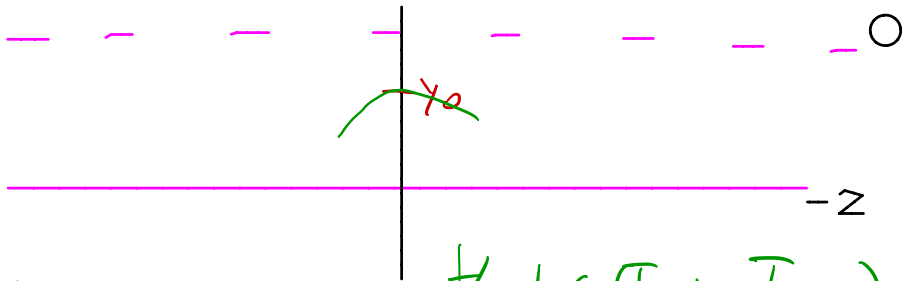
$$\frac{4 - y^2(t)}{y(t)} > 0$$

$$< 0$$

$$\text{sign}(y') = -\text{sign}(t).$$

y decresce su $(0, T_{\max})$

y cresce su $(T_{\min}, 0)$



$$\Rightarrow -2 < y(t) \leq y_0 \quad \forall t \in (T_{\min}, T_{\max})$$

$$\Rightarrow T_{\min} = -\infty, \quad T_{\max} = +\infty$$

- So grā che y è PARI
- per il teor. a sintoto, vedrō
che $L_+ = -2$

Es. 14. (Tema d'esame del 10/04/2011)

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log(\log^2(y) + \frac{1}{2}) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

con $y_0 > e^{-1/\sqrt{2}}$.

$$f(t, y) = \log(\log^2(y) + \frac{1}{2}).$$

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$$

→ non è una serie a
verticale!

$f \in C^1(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \Rightarrow \text{ok teor. } \exists! \text{ locale}$

non posso
applicare
teor.

$\exists!$
GLOBALE

Quindi $\forall y_0 > e^{-1/\sqrt{2}}$ la soluz. è
def su $(T_{\min}, T_{\max})$, per ora non
specificato.

Soluz. STAZIONARIA

$$\log(\log^2(c) + 1/2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\log^2(c) + 1/2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \log^2(c) = \frac{1}{2} \Rightarrow \log(c) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow c = e^{1/\sqrt{2}} \text{ o } c = e^{-1/\sqrt{2}}$$

Ci sono 2 soluz-stazionarie:

$$y(t) \equiv e^{1/\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad y(t) = e^{-1/\sqrt{2}}.$$

Perché consideriamo solo $y_0 > e^{-1/\sqrt{2}}$,

Ci sono 2 casi

$$\boxed{1} \quad e^{-1/\sqrt{2}} < y_0 < e^{1/\sqrt{2}}$$

$$\boxed{2} \quad y_0 > e^{1/\sqrt{2}}$$

Caso 1 $e^{-1/\sqrt{2}} < y_0 < e^{1/\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow y(t) \in (e^{-1/\sqrt{2}}, e^{1/\sqrt{2}})$$

$$\forall t \in (T_{\min}, T_{\max})$$

$$\Rightarrow T_{\min} = -\infty, T_{\max} = +\infty$$

$$\Rightarrow \log^2(y(t)) < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y'(t) = \log(\log^2(y(t)) + \frac{1}{2}) < 0$$

$\Rightarrow y$ è decrescente.

Per monotonia

$$\exists \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = L_- \in (y_0, e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}]$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{t \rightarrow -\infty} y'(t) = \log(\log^2(L_-) + \frac{1}{2})$$

$\Rightarrow$ per il test. asintotico si deve avere

$$\log(\log^2(L_-) + \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$L_- = e^{1/\sqrt{2}} \text{ o } L_- = e^{-1/\sqrt{2}}$$

l'unica possibilità è $L_- = e^{+1/\sqrt{2}}$.

Analogamente, si vede che

$$\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = e^{-1/\sqrt{2}}$$



Convergenza / Conoscenza

$$\begin{aligned} y''(t) &= \frac{d}{dt} y'(t) = \frac{d}{dt} \left(\log(\log^2(y(t)) + 1/2) \right) \\ &= \frac{y'(t)}{\log^2(y(t)) + 1/2} \cdot \frac{2 \log(y(t))}{y(t)}. \end{aligned}$$

Perché $\log^2(y(t)) + 1/2 > 0$ e $y(t) > 0$,
il segno di y'' dipende solo dal
segno di y' e di $\log(y)$

Ricordo che $y'(t) < 0$

$$\Rightarrow \operatorname{sign}(y'') = -\operatorname{sign}(\log(y))$$

$$\Rightarrow y''(t) \begin{cases} \geq 0 & \text{se } \log(y(t)) < 0 \\ & \Leftrightarrow y(t) < 1 \\ \leq 0 & \text{se } \log(y(t)) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow y(t) \geq 1 \end{cases}$$

$$\underline{Ora:} \quad \begin{cases} L_- = e^{1/\sqrt{2}} > 1 \\ L_+ = e^{-1/\sqrt{2}} < 1 \end{cases}$$

e y strett. decrescente

Quindi $\exists! t_* \in \mathbb{R}$ tale che

$$y(t_*) = 1, \quad \text{e si ha che}$$

- per $t < t_*$, $y(t) > 1 \Rightarrow y$ concava
- per $t > t_*$, $y(t) < 1 \Rightarrow y$ convessa

Caso 2

$$y_0 > e^{1/\sqrt{2}}$$

Quindi $y(t) > e^{1/\sqrt{2}} \quad \forall t \in (T_{\min}, T_{\max})$.

Si vede che

$$y'(t) > 0 \quad \forall t \in (T_{\min}, T_{\max})$$

$\Rightarrow y$ è crescente.

Quindi $e^{1/\sqrt{2}} < y(t) \leq y_0 \quad \forall t \in (T_{\min}, 0]$.

Da questo concludo che $T_{\min} = -\infty$

(Applico il teor. sul prolungamento
della slide 132, oppure osservo che
ho crescita sublineare lungo la
soluzione, ristretta a $(T_{\min}, 0]$).

Per dimostrare che $T_{\max} = +\infty$,
verifico ancora che ho
crescita sublineare lungo la soluzione,
ristretta a $[0, T_{\max})$. Come?

• non ho più una stima a priori su $y(t)$ come invece in (*) -

Dovrò usare le proprietà di $\log$!

[1] Ricordo che $\log(y) \leq y \quad \forall y > 0$
(1)

[2] Perché $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\log^2(y)}{y} = +\infty$,
vale anche (2)
 $\exists A, B > 0: \forall y \in (0, +\infty) \quad \log^2(y) \leq Ay + B$

Quindi si ha, lungo la soluzione $y(t)$,

$$f(t, y(t)) = \log(\log^2(y(t)) + 1/2)$$

per (1)

$$\leq \log^2(y(t)) + 1/2$$

per (2)

$$\leq Ay(t) + B + 1/2$$

Perché per $y_0 > e^{1/2}$ si ha che

$$y'(t) = f(t, y(t)) > 0 \quad \text{e} \quad y(0) > 0,$$

ho anche la disuguaglianza con i
moduli

$$|f(t, y(t))| \leq A|y(t)| + B + \frac{1}{2}$$

OK crescita sublineare lungo la
soluzione!

$$\Rightarrow T_{\max} = +\infty$$

Con lo stesso conto di prima si vede
che

$$y''(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow y$ è convessa.

Con il teor. dell'asintoto si vede che

$$L_- = \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = e^{1/\sqrt{2}}$$

$$L_+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$$

(in questo caso
si ragiona per
Assurdo)

Il teorema del confronto

Siano u e v le soluzioni di

$$\begin{cases} u' = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = y_0, \end{cases} \quad \begin{cases} v' = g(t, v(t)), \\ v(t_0) = y_0, \end{cases}$$

con f e g soddisfacenti le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale. Supponiamo che

$$g(t, y) \geq f(t, y) \quad \forall t \in I, y \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\begin{aligned} v(t) &\geq u(t) & \forall t \in I, t \geq t_0, \\ v(t) &\leq u(t) & \forall t \in I, t \leq t_0. \end{aligned}$$

Es. 15.

[Es. Atipico]

Dimostrare che il dominio massimale di definizione di

$$\begin{cases} y' = y^2 + t^2, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

non è tutto $\mathbb{R}$.

$$f(t, y) = y^2 + t^2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

OK $\exists!$ locale

dom $(f) \subset \mathbb{R}^2$, sinuosa verticale - OK

Per $f(t, y) = t^2 + y^2$ NON ha crescita

sublimeare!

non posso applicare il Teor. $\exists!$
globale.

y è def. su $(T_{\min}, T_{\max})$.

Dimostrano che y è $\mathcal{C}^1$ e $\mathcal{C}^2$, cioè che

$z(t) = -y(-t)$ coincide con $y(t)$.

Questo seguirà dal fatto che z risolve lo
stesso problema di Cauchy di y .

Infatti

$$z'(t) = \frac{d}{dt} (-y(-t)) = (-1) \cdot y'(-t) \quad (-1)$$

$$\begin{aligned} &= y'(-t) = (y(-t))^2 + (-t)^2 \\ &= (-y(-t))^2 + t^2 \\ &= z^2(t) + t^2 \end{aligned}$$

$$\text{e } z(0) = -y(0) = 0.$$



Dimostreremo quindi che $T_{\max} < +\infty$

Per dispartita avremo anche $T_{\min} > -\infty$

Procedimento 1 . Per assurdo $T_{\max} = +\infty$.

Usando il teor. dell'asintoto si dimostra, che

$$L_+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$$

che esiste perché y è crescente,
infatti $y'(t) \geq t^2 \geq 0 \quad \forall t \in [0, +\infty)$

Se come $y(0) = 0$ e $L_+ = +\infty$ (e y è continua), $\exists t_* > 0$ tale che

$$y(t_*) = 1$$

Confronto la soluzione $y(t)$, che risolve

$$\begin{cases} y' = t^2 + y^2 \\ y(t_*) = 1 \end{cases}$$

con la soluzione del pb.

di Cauchy $\begin{cases} z' = z^2 = g(t, z) \\ z(t_*) = 1 \end{cases}$. Per il teor del

confronto, siccome

$$f(t, y) = t^2 + y^2 \geq g(t, y) = y^2, \text{ deduco}$$

$$\text{che } y(t) \geq z(t) \quad \forall t \geq t_*$$

Posso risolvere esplicitamente

$$\begin{cases} z'(t) = z^2(t) & (\text{È A VAR. SEPARABILI!}) \\ z(t_*) = 1 \end{cases}$$

e trovo $z(t) = \frac{1}{t_* + 1 - t}$

Quindi ho

$$y(t) \geq z(t) = \frac{1}{t_* + 1 - t} \quad \forall t \geq t_*$$

Ma per $t \rightarrow (t_* + 1)^-$ $z(t) = +\infty$, quindi concluso

che $\lim_{t \rightarrow (t_*+1)^-} y(t) = +\infty$. Assumendo, in
contraddizione con il fatto che $T_{\max} = +\infty$.

Procedimento 2 Per assumere $T_{\max} = +\infty$.
Dall'equazione differenziale deduco che

$$\frac{y'(t)}{y^2(t) + t^2} = 1 \quad - \quad \text{lo integro su ogni intervallo della forma } [1, s], \forall s \geq 1$$

stepo, $\forall s \geq 1$

$$s-1 = \int_1^s 1 \, dt = \int_1^s \frac{y'(t)}{y^2(t) + t^2} \, dt$$

per uo
che
 $y^2 + t^2 \geq y^2$

$$\leq \int_1^s \frac{y'(t)}{y^2(t)} \, dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_1^s \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{y(t)} \right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{y(t)} \right]_1^s = \frac{1}{y(1)} - \frac{1}{y(s)} \end{aligned}$$

ora, se $T_{max} = +\infty$, si ha

$\lim_{s \rightarrow +\infty} y(s) = +\infty$ come già osservato.

Quindi

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} (s-1) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{y(s)} + \frac{1}{y(1)} \right)$$

$+\infty$

Arrivo alla contraddizione

$$+\infty = \frac{1}{y(1)} - \text{Assurdo!}$$

Es. 16.

Studiare

$$\begin{cases} y' = ye^{y^3} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Es. 17.

Studiare

$$\begin{cases} y' = (e^y - 1)(y - 1) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$f(t, y) = (e^y - 1)(y - 1) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

• Ok $\exists!$ locale.

• $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$, senza vincoli.

Ma f non ha crescita sublineare in y .

non possiamo applicare il teo. $\exists!$ globale.

Soluz. STAZIONARIE

$$y_H \equiv 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (\text{con condiz. di Cauchy } y(0) = \alpha = 0)$$

$$y_H \equiv 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (\text{con condiz. di Cauchy } y(0) = \alpha = 1)$$

Quindi considero 3 casi

$$\alpha < 0$$

$$\alpha \in (0, 1)$$

$$\alpha > 1$$

$$\alpha \in (0, 1) \Rightarrow$$

$$0 < y(t) < 1 \quad \forall t \in (T_{\min}, T_{\max}).$$

Allora, per il teo. di prolungamento,
oppure osservando che vale l'ipotesi
di crescita sublineare per $f(t, y(t))$,
deduco che

$$T_{\min} = -\infty, T_{\max} = +\infty$$

Lo studio qualitativo di $y(t)$ è lasciato
per esercizio.

$$\alpha < 0. \Rightarrow y(t) < 0 \quad \forall t \in (t_{\min}, t_{\max}).$$

$$\Downarrow$$
$$e^{y(t)} - 1 < 0, \quad y(t) - 1 < 0.$$

$\Downarrow$
deduco che $y'(t) > 0 \quad \forall t \in (t_{\min}, t_{\max})$
coe' $y(t)$ è crescente.

Quindi

$\forall t \in (0, t_{\max})$ si ha che

$\alpha < y(t) < 0$ - Per il teor. di prolungamento

mentre (o ragionando sulle asintote
sublineare di $f(t, y(t))$), concludo che
 $T_{\max} = +\infty$.

Per quel che riguarda $T_{\min}$, osservo che

$$|f(t, y(t))| = |(e^{y(t)} - 1)(y(t) - 1)|$$

$$= |e^{y(t)} - 1| |y(t) - 1| \quad 0 \leq 1 - e^{y(t)} < 1$$

$$= (1 - e^{y(t)})(1 - y(t)) < (1 - y(t))$$

$\uparrow$ perché $y(t) < 0$

$$\leq 1 + |y(t)|$$

Quindi ho esatta sublineare

Cumpe la soluzione: $T_{\min} = -\infty$

—
Lo studio qualitativo è riservato per
esercizio

$$\alpha > 1$$

Quindi $y(t) > 1 \quad \forall t \in (T_{\min}, T_{\max})$

$$\downarrow$$
$$y'(t) > 0 \rightarrow y \text{ crescente}$$

$$\Rightarrow 1 < y(t) < \alpha = y(0) \quad \forall t \in (T_{\min}, 0)$$

$$\downarrow$$
$$T_{\min} = -\infty$$

—
Dimostrare che $T_{\max} < +\infty$

Per assurdo $T_{\max} = +\infty$

Con il teor. dell'assurdo si vede che

$$L_t = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$$

(che esiste perché y è crescente)

Quindi: $\exists t_* > 0$ tale che

$$y(t) - 1 > \frac{1}{2} \quad (\Leftrightarrow y(t) > \frac{3}{2}) \quad \forall t \geq t_*$$

$$e^{y(t)} - 1 > \frac{1}{2} e^{y(t)} \quad (\Leftrightarrow e^{y(t)} > 2) \quad \forall t \geq t_*$$

e purmoli

$$f(t, y(t)) = (e^{y(t)} - 1) (y(t) - 1)$$

$$\geq \frac{1}{4} e^{y(t)} \quad \forall t \geq t_*$$

Confronto la soluzione y del nostro problema di Cauchy con la soluzione del pb. di Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) = \frac{1}{4} e^{z(t)} \\ z(t_*) = y(t_*) =: y_* \end{cases} \rightarrow \text{valore assunto da } y \text{ in } t_*$$

Per il teor. del confronto, si ha che

$$y(t) \geq z(t) \quad \forall t \geq t_*$$

Calcolo $z(t) = \log \left(\frac{1}{e^{-y_*} + t_* - t} \right),$

che è def su $[t_*, e^{-y_*} + t_*[$

e verifica

$$\lim_{t \rightarrow (t_* + e^{-y_*})^-} \log \left(\frac{1}{e^{-y_*} + t_* - t} \right) = +\infty$$

Quindi concludo che

$$\lim_{t \rightarrow (t_* + e^{-y_*})^-} y(t) = +\infty,$$

contro il fatto che $T_{\max} = +\infty$.

Assunto.

—
Lo studio qualitativo è riservato per
esercizio

Es. 18. (ASSEGNATO)

(no concavità/
convessità)

Studiare

$$\begin{cases} y' = (1 - \exp(y^2))(y - 2) \tanh(y - 4) \arctan(y - \frac{1}{5}) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Es. 19. (ASSEGNATO)

Studiare

$$\begin{cases} y' = \cosh\left(\frac{t^2}{6}\right) + y \arctan(2y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
