Es. 8.

Sia data

$$f_n(x) = \frac{(\tan(x))^n}{\cos^2(x)} \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

- studiare la convergenza puntuale e uniforme di $\{f_n\}_{n>0}$
- discutere l'applicazione del teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale negli intervalli $[0, \frac{\pi}{6}]$ e $[0, \frac{\pi}{4}]$.

$$\cdot \lim_{n\to\infty} (\tan(x))^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |\tan(x)| < 1 \iff |x| < \pi/4 \\ 1 & \text{se } \tan(x) = 1 \iff x = \pi/4 \\ +\infty & \text{se } \tan(x) > 1 \iff x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \nexists & \text{se } \tan(x) \leq -1 \iff -\frac{\pi}{2} < x \leq -\pi/4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\tan(x)^n}{\cos^2(x)} = f(x) \quad \text{con}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \\ \frac{1}{\cos^2(x)} & \text{se} \quad x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

L'insieme di convergenza puntuale è $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Siccome f non è continua su $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ (salto in $\frac{\pi}{4}$), la convergenza non può essere uniforme.

Esercizio: verificare che NON si ha convergenza uniforme su $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Dimostriamo la convergenza uniforme su ogni intervallo $[-a, a]$, $\forall\, 0 < a < \frac{\pi}{4}$. Su $[-a, a]$ si ha $f(x) \equiv 0$.

Quindi

$$\sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x)-f(x)|$$

$$= \sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[-a,a]} \frac{|\tan(x)|^n}{\cos^2(x)}$$

$$= \sup_{x\in[0,a]} \frac{(\tan(x))^n}{\cos^2(x)}$$

perché la funzione $\frac{|\tan(x)|^n}{\cos^2(x)}$ è <u>PARI</u>

La funzione

$$x \longmapsto \frac{(\tan(x))^n}{\cos^2(x)} \text{ è crescente su } [0,a]$$

(ES: studiare il segno della derivata)

$$\Rightarrow \sup_{x\in[0,a]} \frac{(\tan(x))^n}{\cos^2(x)} = \frac{(\tan(a))^n}{\cos^2(a)}$$

e $\lim_{n\to\infty} \frac{(\tan(a))^n}{\cos^2(a)} = 0$ perché $\boxed{\tan(a)<1}$

$\Rightarrow$ ok converg. uniforme

Passaggio al limite sotto il segno di integrale:

✓ Ok su $[0, \pi/6]$ perché $f_n \to f$ unif. su $[-a, a]$ $\forall a < \pi/4$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/6} \frac{(\tan(x))^n}{\cos^2(x)}\,dx = \int_0^{\pi/6} f(x)\,dx = 0$$

· Su $[0, \pi/4]$ il passaggio al limite non è garantito dal teorema.
Lo verifichiamo direttamente:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{(\tan(x))^n}{\cos^2(x)}\,dx = \left[\frac{(\tan(x))^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = \int_0^{\pi/4} f(x)\,dx$$

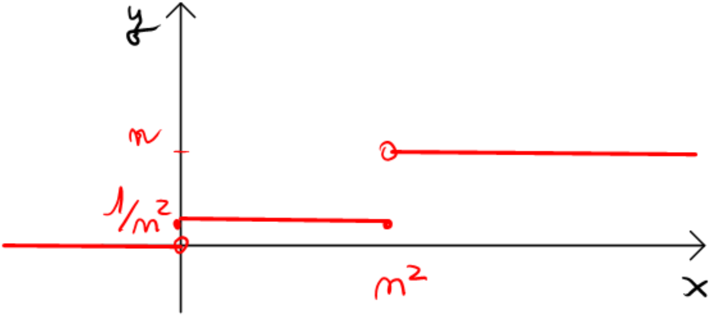
Ok il passaggio al limite sotto integrale ANCHE SENZA CONVERG. UNIFORME!

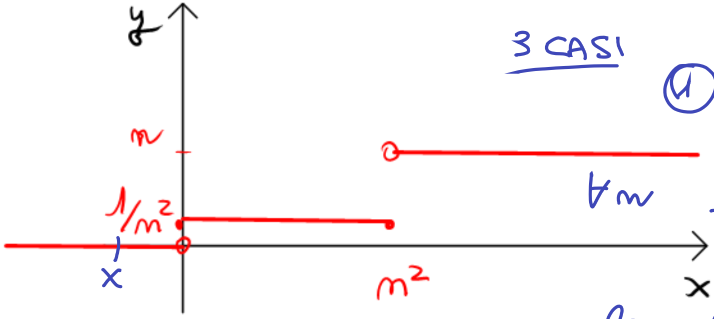
Es. 9.

Sia

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & x \in [0, n^2] \\ 0 & \text{se } x < 0 \\ n & \text{se } x > n^2. \end{cases}$$

Calcolare il limite puntale f di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ su $\mathbb{R}$. La convergenza è uniforme? Discutere la convergenza uniforme sugli intervalli del tipo $[0, a]$ con $a > 0$.





3 CASI

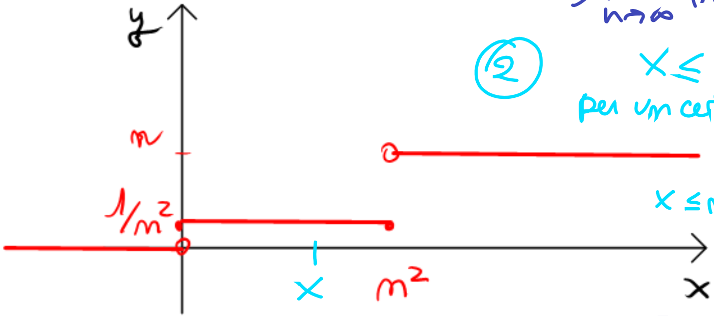
① $x < 0$

$\Downarrow$

$\forall n \quad f_n(x) = 0$

$\Downarrow$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$



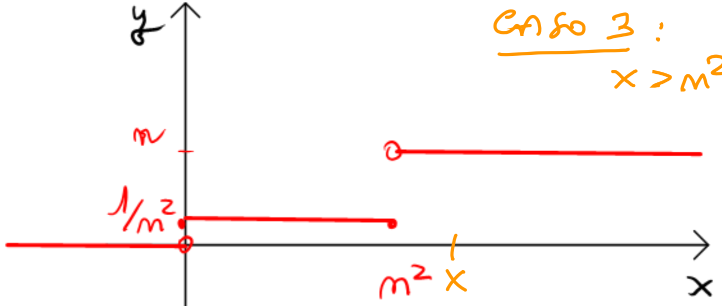
② $x \leq n^2$ per un certo n (e allora $x \leq m^2 \ \forall m \geq n$)

$\Downarrow$

$f_m(x) = \frac{1}{m^2} \xrightarrow{m\to\infty} 0$

Caso 3:

$x > n^2$ per un certo n



Comunque $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$, con $\bar{n} \geq n$, tale che

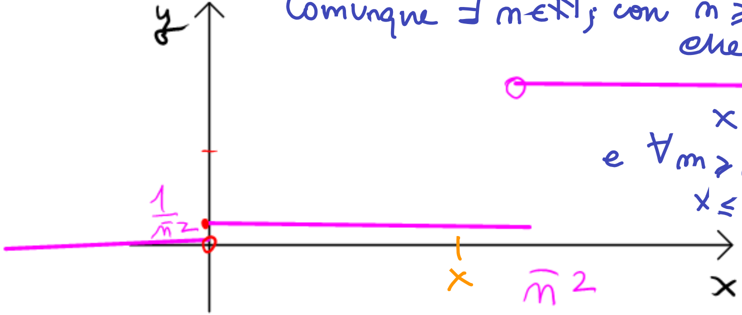
$x \leq \bar{n}^2$

e $\forall\, n \geq \bar{n}$,

$x \leq n^2$

$\Downarrow$

$f_n(x) = \dfrac{1}{n^2} \to 0$



Abbiamo quindi dimostrato che

$\forall x \in \mathbb{R}$ <u>fissato</u>,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

(intuitivamente, la ragione è che l'insieme su cui f_n vale 0, o $\frac{1}{n^2}$, si "sposta verso destra" al crescere di n).

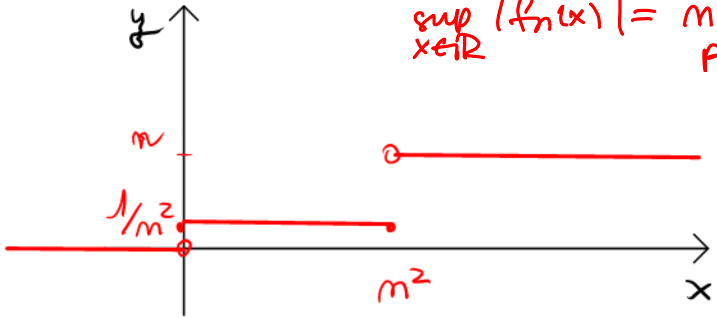
Convergenza uniforme.

$$f(x) \equiv 0.$$

$$¿ \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = 0 \;?$$

NO perché

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = n \to +\infty \quad \text{per } n\to\infty$$

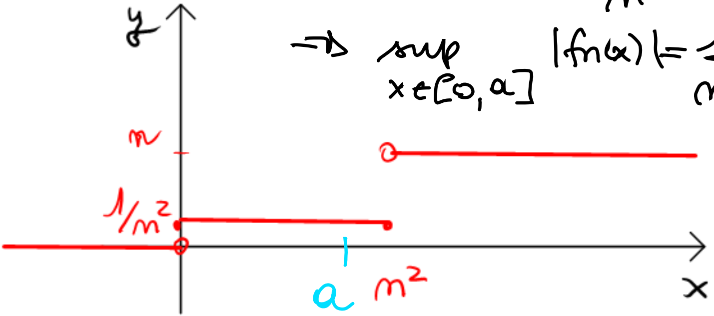


Convergenza uniforme su $[0, a]$. $\boxed{\text{OK}}$

Fisso $a > 0$. $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq \bar{n}$ si ha $a \leq n^2$.

allora $f_n(x) = \frac{1}{n^2} \quad \forall\, x \in [0, a]$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0,a]} |f_n(x)| = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$



Notazione: dato $A \subset \mathbb{R}$, indichiamo con χ_A la *funzione caratteristica* di A

$$\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \text{ data da } \ \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esercizio 11. Calcolare il limite puntuale e discutere la convergenza uniforme di

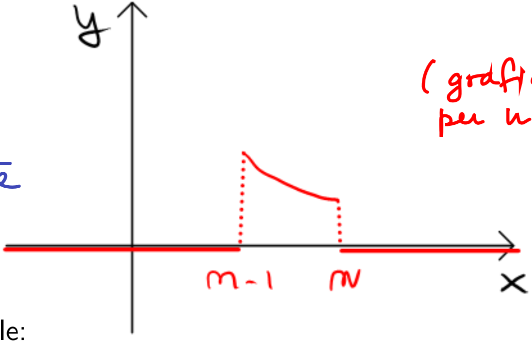
$$f_n(x) = (-1)^n e^{-\frac{x^2+1}{n^3}} \ \chi_{[n-1,n]}(x).$$

Dimostrare che si ha convergenza uniforme su $[0, a]$ per ogni $a > 0$.

$$f_n(x) = \begin{cases} (-1)^n \exp\left(-\dfrac{x^2+1}{n^3}\right) & \text{se } n-1 \leq x \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$x \mapsto e^{-\frac{x^2+1}{n^3}}$

è decrescente



(grafico per n PARI)

Convergenza puntuale:

Intuitivamente: l'insieme dove f_n non vale 0, cioè $[n-1, n]$, si sposta verso destra al crescere di n.

Quindi $f_n(x) \to 0$ per $n \to \infty$

Infatti:

$\forall x \in \mathbb{R}$ fissato, $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$\forall n \geq \bar{n}$, $\quad x < n-1$.

Allora $\quad f_n(x) = 0 \quad \forall n \geq \bar{n}$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 .$$

Converg. uniforme : poiché $f \equiv 0$,

studio

$f_n \equiv 0$ su $\mathbb{R} \setminus [n-1, n]$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x \in [n-1, n]} \left| (-1)^n \exp\left(-\frac{x^2+1}{n^3}\right) \right|$$

$$= \sup_{x \in [n-1, n]} \exp\left(-\frac{x^2+1}{n^3}\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{(n-1)^2+1}{n^3}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} e^0 = 1$$

$x \mapsto e^{-\frac{x^2+1}{n^3}}$ è decrescente : assume max in $n-1$

$\Rightarrow$ NON si ha convergenza uniforme in $\mathbb{R}$

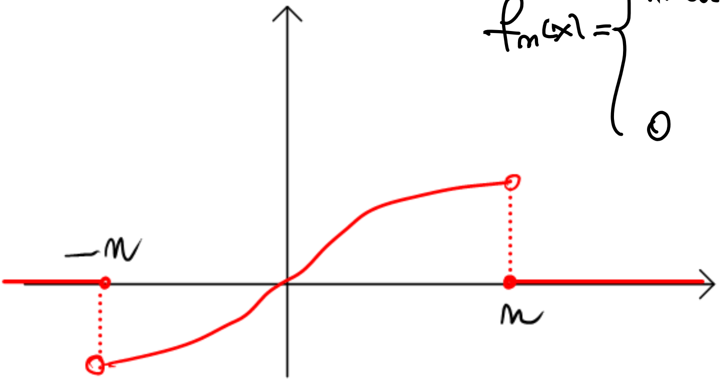
ES: dimostrazione che si ha converg. uniforme su $[-\infty, a]$ $\forall a > 0$

Es. 12.

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite puntuale e discutere la convergenza uniforme di

$$f_n(x) = n^\alpha \arctan \frac{x}{n^2} \chi_{]-n,n[}(x) \, .$$

$$f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right), & \text{se } |x| < n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Limite puntuale:

fisso $x \in \mathbb{R}$. $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \bar{n}$

$$|x| < n \Rightarrow f_n(x) = n^\alpha \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)$$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[n^\alpha \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)\right]$$

uso che $\forall x \in \mathbb{R}$ $\frac{x}{n^2} \to 0$ e che $\arctan(t) \sim t$ per $t \to 0$

$$= \lim_{n\to\infty} n^\alpha \frac{x}{n^2} = x \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-2}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 2 \\ 1 & \text{se } \alpha = 2 \\ 0 & \text{se } \alpha < 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ <u>3 CASI</u>

. Per $\alpha > 2$

$$f_n(x) \sim x\, n^{\alpha-2}$$

converge solo per $x=0$, a 0

$\Rightarrow$ l'insieme di converg. puntuale è

$$\{0\}$$

- Caso $\alpha = 2$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x\, n^0 = x = f(x)$$

$\rightarrow$ f_n converge puntualm. a $f(x) = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

- Caso $\alpha < 2$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x\, n^{\alpha-2} = 0 = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Studio la converg. uniforme solo per $\alpha \leq 2$.

Caso $\alpha < 2 \Rightarrow f(x) \equiv 0$.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{|x|<n} \left| n^\alpha \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right) \right|$$

$$= \sup_{x \in [0,n)} n^\alpha \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)$$

la fz. $x \mapsto \left| \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right) \right|$ è PARI

$$= n^{\alpha} \arctan\left(\frac{n}{n^2}\right) = n^{\alpha} \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$$

$x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{n^2}\right)$ è crescente, ie

sup = max è assunto in n.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \underbrace{\arctan\left(\frac{1}{n}\right)}_{\sim 1/n} = \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } 1<\alpha<2 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Ho converg. uniforme per $\underline{\underline{\alpha < 1}}$

- Caso $\alpha = 2 \Rightarrow f(x) = x$

Studio

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$$

$$\geq \sup_{|x| \geq n} |f_n(x) - f(x)|$$

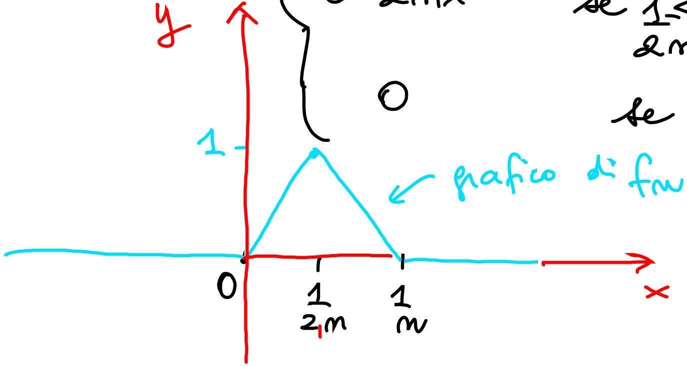
su $\mathbb{R} \setminus (-n, n)$, $f_n(x) \equiv 0$

$$\geq \sup_{|x| \geq n} |-x| \geq n \longrightarrow +\infty \text{ per } n \to \infty$$

$\Rightarrow$ Per $\alpha = 2$ non si ha
convergenza uniforme

ES 13

$$
f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ 2nx & \text{se } 0 < x < \frac{1}{2n} \\ 2 - 2nx & \text{se } \frac{1}{2n} \le x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } x > \frac{1}{n} \end{cases}
$$



Converg. puntuale:

l'insieme dove f_n è diverso da 0 è l'intervallo $(0, \frac{1}{n}]$, che, per $n \to \infty$, tende a ridursi al vuoto.

Quindi $f_n(x) \to 0$ per $n \to \infty$

Rigorosamente: $\forall x \le 0$, $f_n(x) = 0 \quad \forall n$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$$

- $\forall x > 0$, $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq \bar{n}$

$x \geq \frac{1}{n} \Rightarrow f_n(x) = 0 \quad \forall n \geq \bar{n}$

$\Downarrow$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$$

Converg. uniforme:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{0 \leq x \leq \frac{1}{n}} f_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = 1$$

$\longrightarrow$ no converg. uniforme.

Vale il passaggio al limite sotto il segno di integrale comunque?

Sì perché

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \underbrace{\int_0^{1/n} f_n(x)\,dx}_{\text{area triangolo di base } \frac{1}{n} \text{ e altezza } 1} = \frac{1}{2n} \longrightarrow 0 \text{ per } n\to\infty$$

Es. 15.

Convergenza puntuale e uniforme di

$$f_n(x) = \log\left(1 + n\left(\frac{x}{7}\right)^n\right)\left(\frac{x}{7}\right)^{n-1}, \qquad x \in [0, +\infty).$$

Converg. puntuale:

pongo $t = \dfrac{x}{7}$ e studio

$$\lim_{n\to\infty} \log(1+nt^n)\, t^{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le t < 1 \\ +\infty & \text{se } t = 1 \\ +\infty & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

ho converg. puntuale a $f(x) \equiv 0$
solo per $t = \frac{x}{7} < 1$, cioè su
$[0,7)$ insieme di converg. puntuale

Es: dim. che non si ha converg. uniforme su $[0,7)$

Suggerimento: considerare $\{x_n\} \subseteq [0,7)$
$$x_n := 7e^{-\frac{1}{n}}$$

(nota che $7e^{-1/n} \to 7$ per $n \to \infty$)

e studiare

$$\lim_{n\to\infty} \left| f_n \left(7e^{-1/n} \right) \right| .$$

Oss che

$$\sup_{x \in [0,7)} |f_n(x)| \geq \left| f_n\left(7e^{-1/n}\right) \right|$$

Dim che si ha converg. uniforme su $[0,a]$ $\forall\, a<7$.

Infatti

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)|$$

$$\le \sup_{x\in[0,a]} \overbrace{\log\left(1+n\frac{x^n}{7^n}\right)\left(\frac{x}{7}\right)^{n-1}}^{\text{funz. crescente}}$$

$$= \log\left(1+n\left(\frac{a}{7}\right)^n\right)\cdot\left(\frac{a}{7}\right)^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

perché $a<7$