Esercizi su curve e integrali curvilinei di prima e seconda specie

Esercizio 1. Calcolare la lunghezza $\mathcal{L}$ della seguente curva

$$\overrightarrow{r}(t) = \cos^2(t)\,\overrightarrow{i}_1 + \cos(t)\sin(t)\,\overrightarrow{i}_2, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Svolgimento. Osserviamo che

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r}'(t) &= -2\cos(t)\sin(t)\,\overrightarrow{i}_1 + (-\sin^2(t) + \cos^2(t))\,\overrightarrow{i}_2\\ &= -\sin(2t)\,\overrightarrow{i}_1 + \cos(2t)\,\overrightarrow{i}_2, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].\end{aligned}$$

Allora

$$\|\overrightarrow{r}'(t)\| = 1 \quad \forall\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

e quindi $\mathcal{L} = \frac{\pi}{2}$.

Esercizio 2. Calcolare la lunghezza $\mathcal{L}$ della seguente curva

$$\overrightarrow{r}(t) = \cosh(t)\cos(t)\,\overrightarrow{i}_1 + \cosh(t)\sin(t)\,\overrightarrow{i}_2 + t\,\overrightarrow{i}_3, \quad t \in [0, 1].$$

Svolgimento. Osserviamo che

$$\overrightarrow{r}'(t) = (\sinh(t)\cos(t) - \cosh(t)\sin(t))\,\overrightarrow{i}_1 + (\sinh(t)\sin(t) + \cosh(t)\cos(t))\,\overrightarrow{i}_2 + \overrightarrow{i}_3 \quad t \in [0, 1].$$

Quindi con facili conti si vede che

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{r}'(t)\|^2 &= \sinh^2(t)\cos^2(t) + \cosh^2(t)\sin^2(t) + \sinh^2(t)\sin^2(t) + \cosh^2(t)\cos^2(t) + 1\\ &= \sinh^2(t) + \cosh^2(t) + 1 = 2\cosh^2(t)\end{aligned}$$

Allora

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \sqrt{2\cosh^2(t)}\,dt = \sqrt{2}\int_0^1 \cosh(t)\,dt = \sqrt{2}\sinh(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

Esercizio 3. Calcolare la lunghezza $\mathcal{L}$ del grafico della funzione

$$f(x) = \ln(\cos(x)), \quad \text{ristretta a } [0, \frac{\pi}{3}].$$

Svolgimento. Osserviamo che una parametrizzazione di graf(f) è

$$\overrightarrow{r}(t) = t\,\overrightarrow{i}_1 + \ln(\cos(t))\,\overrightarrow{i}_2, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

Allora

$$\overrightarrow{r}'(t) = \overrightarrow{i}_1 + \left(-\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\right)\overrightarrow{i}_2, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

Quindi con facili conti si vede che

$$\|\overrightarrow{r}'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}} = \frac{1}{|\cos(t)|} = \frac{1}{\cos(t)}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

Allora

$$\mathcal{L} = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(t)}\, dt$$

che risolvo effettuando la sostituzione

$$z = \tan\left(\frac{t}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = 2\arctan(z), \\ dt = \frac{2}{1+z^2}\, dz, \\ \cos(t) = \frac{1-z^2}{1+z^2}. \end{cases}$$

Quindi, ricordando che $\tan(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$, otteniamo

$$\mathcal{L} = 2\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1-z^2}\, dz = 2\int_0^{1/\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{1+z} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-z}\right) dz = \left[\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right]_0^{1/\sqrt{3}} = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) = \ln(2+\sqrt{3}).$$

Esercizio 4. Calcolare la lunghezza $\mathcal{L}$ del grafico della funzione

$$f(x) = \left(\frac{4}{3} + x\right)^{3/2}, \quad \text{ristretta a } [0,1].$$

Svolgimento. Osserviamo che una parametrizzazione di graf(f) è

$$\overrightarrow{r}(t) = t\,\overrightarrow{i}_1 + \left(\frac{4}{3} + t\right)^{3/2} \overrightarrow{i}_2, \qquad t \in [0,1].$$

Allora

$$\overrightarrow{r}'(t) = \overrightarrow{i}_1 + \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3} + t\right)^{1/2} \overrightarrow{i}_2, \qquad t \in [0,1].$$

Quindi con facili conti si vede che

$$\|\overrightarrow{r}'(t)\| = \frac{1}{2}\sqrt{16+9t}, \qquad t \in [0,1].$$

Allora

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{16+9t}\, dt$$

che risolvo effettuando la sostituzione $z = \sqrt{16+9t}$....
Si ottiene

$$\mathcal{L} = \frac{1}{9}\int_4^5 z^2\, dz = \ldots\ldots = \frac{61}{27}.$$

Esercizio 5. Scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente alla curva

$$\overrightarrow{r}(t) = \exp(2t)\,\overrightarrow{i}_1 + (t + \ln(t+1))\,\overrightarrow{i}_2, \quad t \in [-\frac{1}{2}, 1],$$

nel punto $P = (1,0)$.

Svolgimento. Osserviamo che
$$\overrightarrow{r}(t_0) = (1,0) \quad \Leftrightarrow \quad t_0 = 0.$$
Calcoliamo
$$\overrightarrow{r}'(t) = 2\exp(2t)\overrightarrow{i}_1 + \left(1 + \frac{1}{t+1}\right)\overrightarrow{i}_2, \quad t \in [-\frac{1}{2}, 1],$$
da cui
$$\overrightarrow{r}'(0) = 2\overrightarrow{i}_1 + 2\overrightarrow{i}_2.$$
Allora l'equazione della retta tangente è
$$K(t) = (t-0)\overrightarrow{r}'(0) + \overrightarrow{r}(0) = (2t+1)\overrightarrow{i}_1 + 2t\overrightarrow{i}_2, \quad t \in \mathbb{R},$$
cioè
$$\begin{cases} x(t) = 2t+1, \\ y(t) = 2t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$
In forma cartesiana l'equazione si riduce a
$$y = x - 1.$$

Esercizio assegnato. Scrivere in forma cartesiana l'equazione della retta tangente alla curva
$$\overrightarrow{r}(t) = (1 - \arctan(t))\overrightarrow{i}_1 + \left(1 - t^2\right)\overrightarrow{i}_2, \quad t \in [0,2],$$
nel punto $P = (1 - \frac{\pi}{4}, 0)$.

Soluzione: $y = 4x + \pi - 4.$

Esercizio 6. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \geq x^2, \\ 2 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$
e sia Γ il segmento congiungente i punti $(0,0)$ e $(3,3)$. Si calcoli l'integrale curvilineo di prima specie
$$\int_\Gamma f\, ds.$$

Svolgimento. Una parametrizzazione di Γ è
$$\overrightarrow{r}(t) = t\,\overrightarrow{i}_1 + t\,\overrightarrow{i}_2, \quad t \in [0,3],$$
da cui si vede immediatamente che $\|\overrightarrow{r}'(t)\| = \sqrt{2}$ per ogni $t \in [0,3]$.

Denotando
$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y \geq x^2\right\},$$
osserviamo che
$$\begin{cases} \overrightarrow{r}(t) \in A & \text{se } t \in [0,1], \\ \overrightarrow{r}(t) \notin A & \text{se } t \in [1,3], \end{cases}$$
da cui
$$\begin{cases} f(\overrightarrow{r}(t)) = 1 & \text{se } t \in [0,1], \\ f(\overrightarrow{r}(t)) = 2 & \text{se } t \in [1,3]. \end{cases}$$
Allora
$$\int_\Gamma f\, ds = \int_0^1 \sqrt{2}\, dt + \int_1^3 2\sqrt{2}\, dt = 5\sqrt{2}.$$

Esercizio 7. Calcolare
$$\int_\Gamma \big((x+y)dx + xydy\big),$$
ove Γ è data dall'unione delle curve

- Γ_1: il segmento congiungente $O = (0,0)$ ad $A = (1,0)$
- Γ_2: l'arco di circonferenza congiungente A ad $B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- Γ_3: il segmento congiungente B ad $C = (2,2)$

Per l'additività dell'integrale, si ha
$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} = \int_{\Gamma_1} \overrightarrow{F} + \int_{\Gamma_2} \overrightarrow{F} + \int_{\Gamma_3} \overrightarrow{F}$$

1. Una parametrizzazione di Γ_1 è
$$\overrightarrow{r}_1(t) := t\,\overrightarrow{i}_1 + 0\,\overrightarrow{i}_2 \quad t \in [0,1]$$
Quindi $\overrightarrow{r}_1'(t) = \overrightarrow{i}_1$ per $t \in [0,1]$ cosicché
$$\int_{\Gamma_1} \overrightarrow{F} = \int_0^1 (t+0)\,1 + (t\cdot 0)0\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

2. Una parametrizzazione di Γ_2 (che giace sulla circonferenza $x^2+y^2=1$) è
$$\overrightarrow{r}_2(t) := \cos(t)\,\overrightarrow{i}_1 + \sin(t)\,\overrightarrow{i}_2 \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$
Quindi
$$\overrightarrow{r}_2'(t) = -\sin(t)\,\overrightarrow{i}_1 + \cos(t)\,\overrightarrow{i}_2 \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$
cosicché
$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} \overrightarrow{F} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(-\sin(t)\,(\cos(t)+\sin(t)) + \cos^2(t)\sin(t)\Big)\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(-\sin(t)\cos(t) - \sin^2(t) + \cos^2(t)\sin(t)\Big)\,dt\end{aligned}$$
Integrando (per parti e sostituzione) (**esercizio!**)
$$\int_{\Gamma_2} \overrightarrow{F} = -\frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{3}$$

3. Una parametrizzazione di Γ_3 è
$$\overrightarrow{r}_3(t) := t\,\overrightarrow{i}_1 + t\,\overrightarrow{i}_2 \quad t \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right]$$
Quindi
$$\overrightarrow{r}_3'(t) = \overrightarrow{i}_1 + \overrightarrow{i}_2 \quad t \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right], \quad \text{da cui}$$
$$\int_{\Gamma_3} \overrightarrow{F} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^2 \left((t+t)+t^2\right)\,dt = \left[t^2 + \frac{t^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^2 = 4 + \frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{37}{6} - -\frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{12}$$
$$\text{Allora:} \quad \int_\Gamma \overrightarrow{F} = 7 - \frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{6}$$
