Integrali indefiniti (III)

Problema: quali condizioni su f garantiscono che f ammette una primitiva?

Teorema (esistenza di primitive): Se

$$f : (a,b) \to \mathbb{R} \text{ è continua su } (a,b),$$

allora f ammette almeno una primitiva (di fatto, ne ammette infinite) su (a,b).

Diamo ora l'esempio di una funzione che NON ammette primitive sul suo intervallo di definizione:

Funzione di Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

non ammette alcuna primitiva su $\mathbb{R}$.
In effetti, se per assurdo esistesse una funzione

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ derivabile su } \mathbb{R} \text{ e con}$$
$$F'(x) = H(x) \ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

F dovrebbe essere:

- costante su $(-\infty, 0)$ (perché su $(-\infty, 0)$ la derivata dovrebbe essere nulla)

- con un andamento lineare su $(0, +\infty)$ (perché su $(0, +\infty)$ la derivata dovrebbe essere costantemente uguale a 1).

Imponendo che

- $F(0) = 0$

- F sia continua in 0 (questa è una richiesta naturale, visto che F deve essere anche derivabile in 0),

otteniamo che

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Ma la funzione F così costruita NON è derivabile in 0. Quindi F non può essere una primitiva per H su $\mathbb{R}$.